Kurventheorie

1. Was ist eine Kurve ?

KURVENTHEORIE

Was ist eine Kurve?

Stellen Sie sich eine Biene vor, die frei durch die Luft fliegt und dabei so manche "Kurve" durchfliegt. In jedem Augenblick befindet sie sich an einem bestimmten Ort im Raum, der sich fortlaufend mit der Zeit ändert. Nun ist die Biene ja ein Körper und somit von räumlicher Ausdehnung. Deshalb kann man ihre Position genaugenommen auch nicht durch einen punktförmigen Ort beschreiben. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, betrachten wir nun nur den Schwerpunkt der Biene. Wir denken uns also die ganze Masse der Biene in einem Punkt vereint, dem Gravitations- oder Schwerpunkt. In jedem Zeitpunkt befindet er sich an einer eindeutig bestimmten Stelle P_t im Raum, denn die Biene kann nicht zur selben Zeit an verschiedenen Stellen sein. Der Schwerpunkt wird durch eine Funktion der Zeit angegeben, genauso wie jeder Funktion f(t) genau ein Funktionswert für ein Argument t angeordnet wird.
Durch den Flug der Biene beschreibt der Schwerpunkt eine Kurve, die durch

Da-dildel-dum,
nur wenn die Sonne lacht,
flieg ich rum

eine Raum-Zeit-Funktion beschrieben wird, wobei die Ortsbeschreibung durch Vektoren+ geschieht. Es ergeben sich dabei drei Koordinatenfunktionen $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$.

Zeit $\longrightarrow$ Ort im Raum

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Jede Kurve K kann auf diese Art beschrieben werden. Man nimmt jedoch anstatt der Zeit t reelle Zahlen als Parameter, die ein bestimmtes Intervall etwa $[a, b]$ durchlaufen. Dadurch ist eine sogenannte Parameterdarstellung der Kurve mit dem Startpunkt $\vec{x}(a)$ und dem Endpunkt $\vec{x}(b)$ gegeben. Wie die Biene keinen Ort "überspringen" kann, sondern jeder Punkt einen beliebig nahen Nachbarpunkt kontinuierlich ablöst (*natura non facit saltus*), so verlangt man die *Stetigkeit* der Koordinatenfunktionen für jede Kurve. Diese Stetigkeit bedeutete anschaulich, daß die Kurve "in einem Zuge" gezeichnet werden kann, ohne das Schreibgerät abzusetzen. Eine weitere Forderung an die Kurve ist die *Differenzierbarkeit*, was bedeutet, daß alle Koordinatenfunktionen ableitbar sein müssen. Bei dem

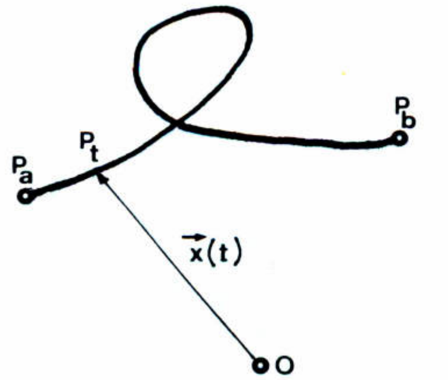
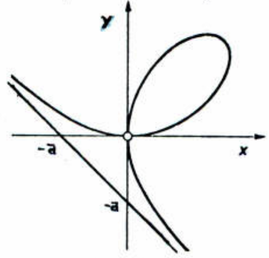


Abb. 1: Kurve mit einem Doppelpunkt
(Alle Punkte sind regulär sonst)

$$\vec{x}(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}, 0 \right)$$

$$x^3 + y^3 = 3axy$$



Kartesisches Blatt

Diese Kurve hat im Nullpunkt einen Doppelpunkt

+ VEKTOREN sind gerichtete Strecken. Jeder Pfeil repräsentiert eine Klasse parallelgleicher Pfeile.

Bienenflug heißt das, daß sie zu jedem beliebigen Zeitpunkt eine ganz bestimmte Geschwindigkeit und vor allem eine eindeutige Geschwindigkeitsrichtung oder Tangente besitzt. Auch soll die Geschwindigkeit, oder genauer gesagt, der Betrag des Geschwindigkeitsvektors $|\vec{x}'(t)|$ nicht Null werden, was für die Biene heißt, daß sie nicht in der Luft stillstehen soll. Sie soll also nicht an einer Position verbleiben, was manche Insekten fertigbringen. Mathematisch nennt man diese Forderung die Regularität der Kurve, und dort, wo die Kurve die Geschwindigkeit Null hat, besitzt sie singuläre (= nicht reguläre) Stellen. Auch kann man von der Biene noch erwarten, daß sie die Geschwindigkeit kontinuierlich vergrößert oder verkleinert und nicht von einem Augenblick zum anderen plötzlich etwa doppelt so schnell wird. Diesem entspricht die Stetigkeit der Geschwindigkeitsfunktion, also der ersten Ableitung nach der Zeit. Man spricht dann von der stetigen Differenzierbarkeit und nennt solche Kurven <u>glatte Kurven</u>. *Existieren noch höhere Ableitungen, die auch noch stetig sind, etwa bis zur n-ten Ableitung $x^{(n)}(t)$, so schreibt man die Kurve* **K** *der Klasse C^n zu, symbo-*

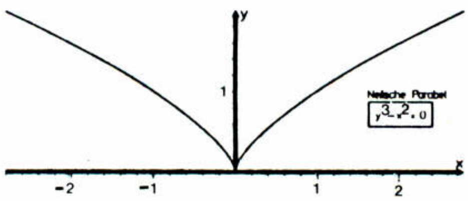
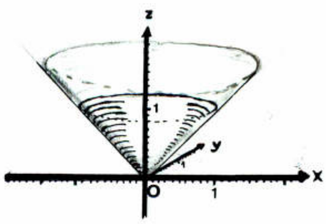
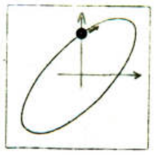


Abb. 2: $y=\sqrt[3]{x^2}$ hat im Ursprung eine singuläre Stelle

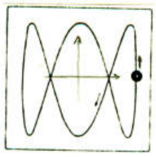


Entsprechend ist auch die Spitze O des Kegels $x^2+y^2=2z$ die einzige singuläre Stelle, da nur dort die erste Ableitung nicht existiert.

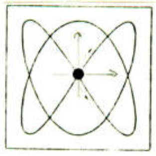
lisch $K \in C^n$. Existieren dabei überhaupt alle nur möglichen Ableitungen, so ist $K \in C^\infty$, und wenn sie sich zudem noch *durch ihre unendliche Taylorreihe darstellen läßt*, was meistens der Fall ist, so nennt man die Kurve analytisch, symbolisch $K \in C^\omega$. Im allgemeinen wird man noch die *Doppelpunktfreiheit* der Kurve verlangen und spricht dann von einer *einfachen Kurve*. In unserem Bienenbeispiel bedeutete dies, daß die Biene keine Stelle zweimal überfliegt, daß sich die Flugbahn also nicht etwa durchkreuzt, was man allerdings der Biene nicht vorschreiben kann. Ferner ist eine Kurve geschlossen, wenn ihr Anfangspunkt zugleich Endpunkt ist und einfach geschlossen, wenn die Kurve nur einmal, und zwar doppelpunktfrei durchlaufen wird.



$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin(t+\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$



$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin 3t \end{pmatrix}$$



$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 3t \end{pmatrix}$$

bb. 2b: Geschlossene(reguläre) Lissajous-Kurven mit den Frequenzverhältnissen 1:1 , 1:3 und 2:3 .

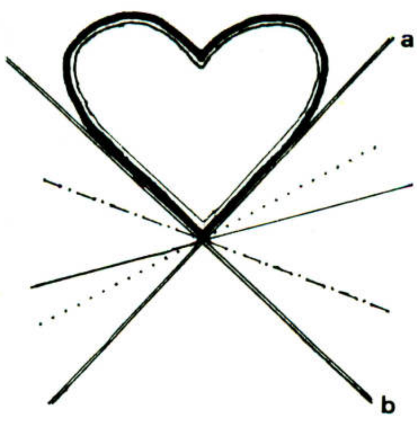


Abb. **2c**: *Geschlossene Kurve mit zwei Spitzen*
a und b sind Grenzgeraden

Hugo Edgar **Wehrle** Oberdorfstr. 30 78 224 Singen
☎ 07731- 41 41 8 ✉ H_Wehrle@email.de