

Kurventheorie

3. *Parametertransformationen*

Was ist eine Parametertransformation?

Wir werden nun im Folgenden derartig entartete Kurven nicht mehr betrachten, sondern nur noch eindimensionale Kurven, die bijektive und bistetige Abbildungen eines abgeschlossenen Intervalls sind. Dies sind stetige Abbildungen, bei dem jedem Parameterwert genau ein Punkt zugeordnet wird und dasselbe für die stetige Umkehrabbildung gilt. Dies sind sogenannte topologische Abbildungen, da sie jedem Punkt und jeder seiner Umgebungen eindeutig einen Bildpunkt und Bildumgebung zuordnet und umgekehrt. Dies ist bei Peanokurven nicht der Fall! Insbesondere heißen die topologischen Bilder der Kreislinie *Jordankurven* (Abb. 21), was anschaulich gesprochen verzogene, verbeulte oder sonst wie stetig deformierte Kreise sind. Auf sie werden wir noch zu sprechen kommen.

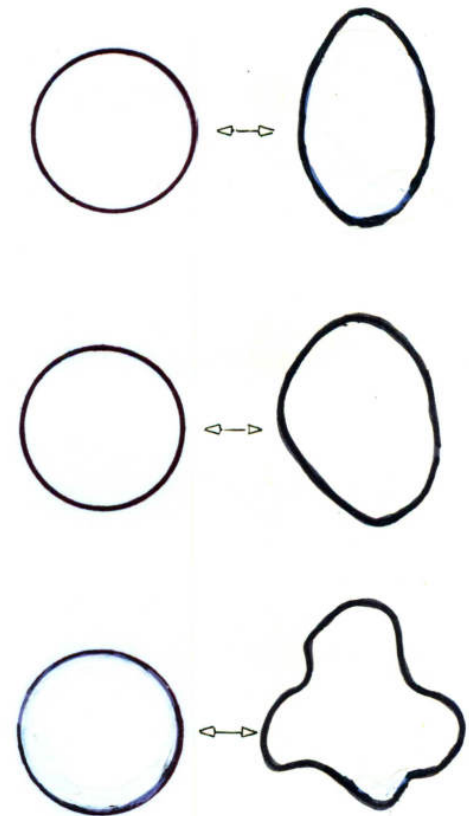


Abb. 21: Jordankurven

Kommen wir nun zurück auf die Kurve, welche der Schwerpunkt unserer Biene beschrieben hat, und fragen wir uns, ob sie nur durch eine Funktion beschrieben werden kann. Wir könnten ja die Biene bei ihrem Flug filmen und dann den Film etwa doppelt so

schnell ablaufen lassen, so daß die Zeit quasi doppelt so schnell vergeht. Die Bahnkurve, welche die Biene dabei durchfliegt, bleibt dabei dieselbe. Wir könnten die Zeit auch dreimal so schnell ablaufen lassen oder aber die Zeit verlangsamen und uns die Bahn in Zeitlupe anschauen. Es gibt unendlich viele Möglichkeiten. Dem veränderten Zeitablauf entspricht einem geänderten Parameter und man erhält eine andere Funktion, welche dieselbe Kurve beschreibt. Geht man vom Parameter t zum neuen Parameter t^* über, was durch eine Funktion

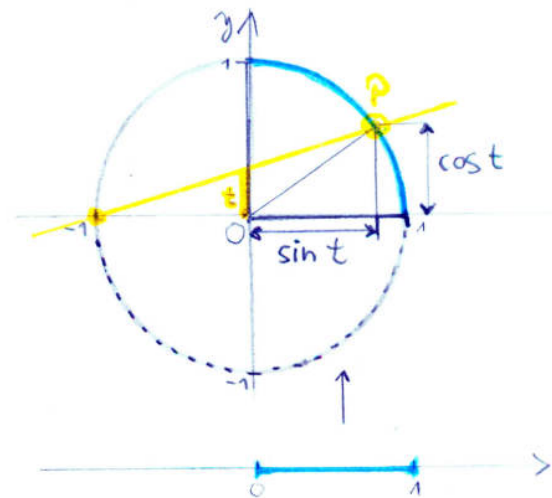
$$t^* = \varphi(t)$$

geschieht, so gilt:

$$\vec{x}^*(t^*) = \vec{x}(t)$$

wobei $\vec{x}^*(t^*) = \vec{x}(\varphi^{-1}(t^*))$

ist. Der Zusammenhang von t und t^* wird dabei durch eine Funktion beschrieben, die zumindest *bijektiv, stetig und monoton* sein muß. Man nennt sie die *Parametertransformation*. Beim Bienenvergleich bedeutet die Stetigkeits- und Monotonieforderung, daß man den Film stets in einer Richtung laufen läßt, ohne zu unterbrechen, wobei auch keine Bilder oder gar Meter Filmstreifen aus dem Film geschnitten werden dürfen. Will man bei einer C^n -Kurve eine Parametertransformation durchführen,



$$\vec{x}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Es gibt viele Darstellungen:
Aus der KREISGLEICHUNG

$$x^2 + y^2 = r^2$$

folgt für den $\frac{1}{2}$ EINHEITSKREIS

$$\vec{x}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{1-x^2} \end{pmatrix}$$

mit der Parametertransformation

$$\varphi(t) = \sin t$$

Ein weiteres Beispiel ist

$$\vec{x}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{x} \mapsto \frac{1}{1+t} \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$(-1, 0)$ wird für $t \rightarrow \infty$ erreicht!

t ist dabei der y -Achsenabschnitt der durch P und $(-1, 0)$ gehenden Geraden.

so muß auch $\varphi(t)$ n mal stetig differenzierbar sein, zusätzlich zur etwas strengeren Forderung, daß ihre erste Ableitung $\varphi'(t)$ nirgendwo Null werden darf.

Nun kann man den Film ja auch rückwärts laufen lassen, wobei die Bienenkurve dieselbe bleibt, nur eben rückwärts durchlaufen, was der Umkehrtransformation entspricht. Dabei ändert sich die Orientierung der Kurve allerdings.

Bildet man nun die Ableitungen der transformierten Funktion, so ergibt sich für die erste Ableitung noch einen recht einfachen Zusammenhang, nämlich wegen

$$\frac{d\vec{x}^*}{dt^*} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{dt^*}$$

$$\vec{x}^{*'} = \vec{x}' \cdot \varphi'$$

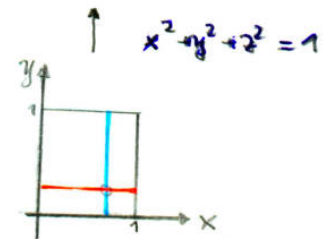
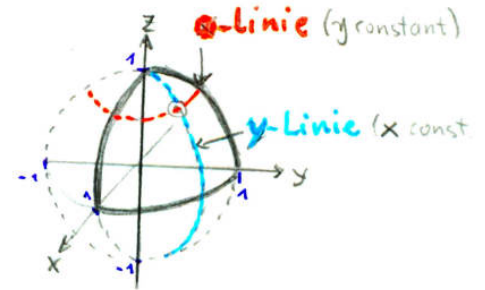
Bei höheren Ableitungen wird er jedoch zusehends schwieriger.

Was passiert eigentlich, wenn die Biene bei ihrem Flug plötzlich keine Flügeltätigkeiten mehr ausübt? Fliegt sie dann trotzdem noch weiter und wenn ja, in welche Richtung fliegt sie dann weiter? Nun, die Biene fliegt

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ u^2+v^2+1 \end{pmatrix}$$

Pol P Ebene
= $\frac{2\sqrt{1+u^2+v^2}}{1+u^2+v^2}$
abwärts durch 1/2?



$$\vec{x}: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

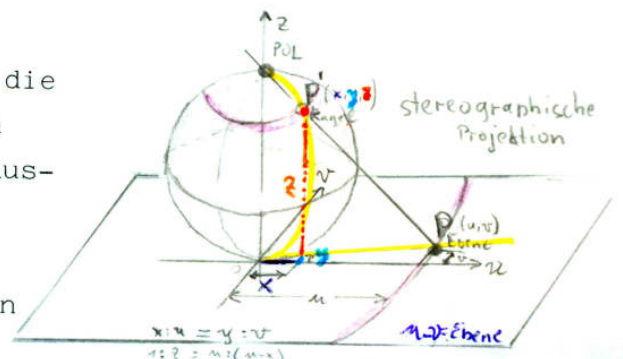
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin x \cos y \\ \sin x \sin y \\ \cos x \end{pmatrix}$$

Den 1. Oktanten der EINHEITSKUGEL wird explizit durch

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1-u^2-v^2} \end{pmatrix}$$

dargestellt. Um parametrisierung

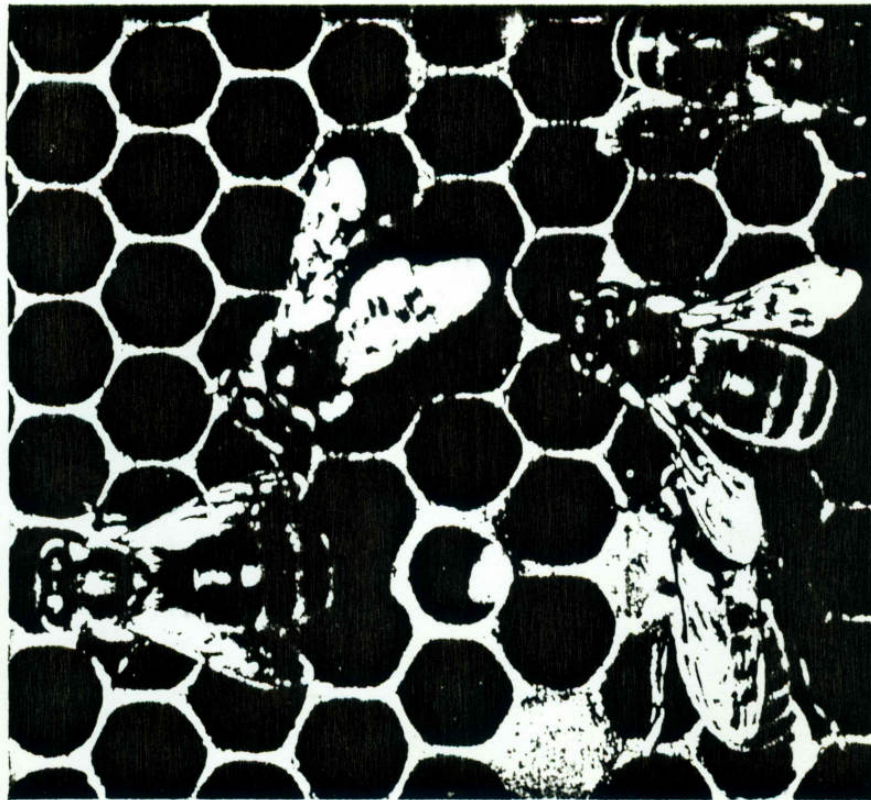
$$\varphi(x,y) = (\sin x, \cos y)$$



$$\mathbb{R}^2 \leftrightarrow S_2 \text{ (Kugel um 0 mit } r=1)$$

Die ganze Ebene wird auf die Einheitskugel S_2 abgebildet, wobei der Pol das Unendlichenbild ist.

dann "tangential" zur Bahn-
kurve weiter, straks geradeaus,
ohne die Richtung zu ändern,
dem Trägheitsgesetz entsprechend.



Was erzählen die Tänze den Bienen?

1. Was ist eine Kurve?	1
2. Pathologische Kurven	5
3. Was ist eine Parametertransformation?	14
4. Die Tangente	18
5. Wie kann man die Länge einer Kurve berechnen?	19
6. Die Bogenlänge als natürlicher Parameter..	24
7. Was bedeutet die zweite Ableitung?	26
8. Wie kann man die Krümmung noch charakterisieren?	28
9. Wir bewegen das Bezugssystem mit	31
10. Was ist das Tangentenbild?	32
11. Legt die Krümmung die Kurve eindeutig fest?	34
12. Wann berühren sich zwei Kurven?	37
13. Was ist ein Krümmungskreis?	41
14. Die Evolute	47
15. Die-Involute.	55
16. Unterschied zwischen lokal und global?.	58
17. Der Jordansche Kurvensatz..	60
18. Was ist Topologie?	64
19. Die Windungszahl	70
20. Projektive und nichteuklidische Geometrie.	82
21. Die Tangentendrehzahl	86
22. Was ist eine Eilinie?	92
23. Wann ist eine Menge konvex?	93
24. Eine Dimension höher	102
25. Was sind Tangentenpolarkoordinaten?	115
26. Geometrische Bedeutungen von h' und h'' ..	117
27. Der Flächeninhalt einer Eilinie..	119
28. Hyperflächen	124
29. Allgemeine Relativitäts-Theorie..	131
30. Durchmesser und Breite einer Eilinie	152
31. Was sind Gitterpunkte?..	165
32. Wie heißt der Vierscheitelsatz?	172
33. Gibt es Kreise, die fünf Ecken haben?	192
34. Wozu ist ein Gleichdick nütze?	200
35. Welche Eigenschaften haben Gleichdicke?	205
36. Was sind Zindlerkurven?..	210
37. Wer kennt Kakeyas Problem?	214
38. Raumkurven konstanter Breite..	218
39. Was versteht man unter Gesamtkrümmung?.	220
40. Verallgemeinerte Kurven konstanter Breite.	228
41. Gibt es auch Körper konstanter Breite?.	231
42. Kann man verbogene Flächen eben machen?..	234
43. Wozu stetige Vektorfelder?.	240
44. Die am besten untersuchten Flächen sind minimal.	244
45. Was versteht man unter Katastrophentheorie?..	270
46. Zum Schluss ein fünf-dimensionale Betrachtung.	281
Referenzen	