Kurventheorie

3. Parametertransformationen

Was ist eine Parametertransfermation?

Wir werden nun im Folgenden derartig entartete Kurven nicht mehr betrachten, sondern nur noch eindimensionale Kurven, die bijektive und bistetige Abbildungen eines abgeschlossenen Intervalls sind. Dies sind stetige Abbildungen, bei dem jedem Parameterwert genau ein Punkt zugeordnet wird und dasselbe für die stetige Umkehrabbildung gilt. Dies sind sogenannte topologische Abbildungen, da sie jedem Punkt und jeder seiner Umgebungen eindeutig einen Bildpunkt und Bildumgebung zuordnet und umgekehrt. Dies ist bei Peanokurven nicht der Fall! *Insbesondere heißen die topologischen Bilder der Kreislinie Jordankurven* (Abb. 21), was anschaulich gesprochen verzogene, verbeulte oder sonst wie stetig deformierte Kreise sind. Auf sie werden wir noch zu sprechen kommen.

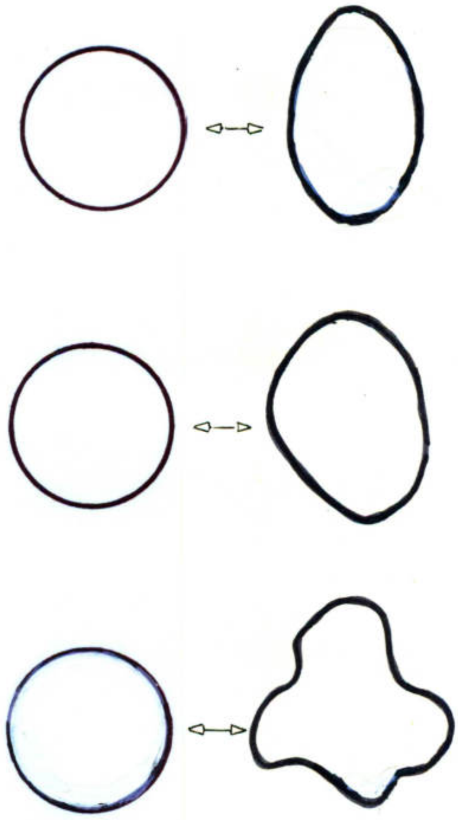


Abb. 21: Jordankurven

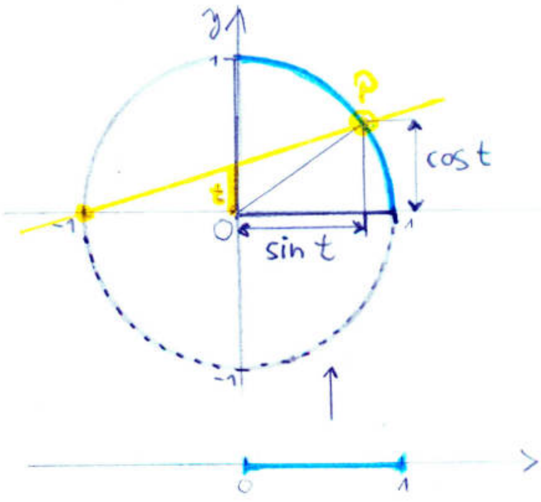
Kommen wir nun zurück auf die Kurve, welche der Schwerpunkt unserer Biene beschrieben hat, und fragen wir uns, ob sie nur durch eine Funktion beschrieben werden kann. Wir könnten ja die Biene bei ihrem Flug filmen und dann den Film etwa doppelt so schnell ablaufen lassen, so daß die Zeit quasi doppelt so schnell vergeht. Die Bahnkurve, welche die Biene dabei durchfliegt, bleibt dabei dieselbe. Wir könnten die Zeit auch dreimal so schnell ablaufen lassen oder aber die Zeit verlangsamen und uns die Bahn in Zeitlupe anschauen. Es gibt unendlich viele Möglichkeiten. Dem veränderten Zeitablauf entspricht einem geänderten Parameter und man erhält eine andere Funktion, welche dieselbe Kurve beschreibt. Geht man *vom Parameter t zum neuen Parameter t^** über, was durch eine Funktion

$$t^* = \varphi(t)$$

geschieht, so gilt:

$$\vec{x}^*(t^*) = \vec{x}(t)$$

wobei $\vec{x}^*(t^*) = \vec{x}\,(\varphi^{-1}\,(t^*)\,)$ ist. Der Zusammenhang von t und t* wird dabei durch eine *Funktion* beschrieben, die zumindest *bijektiv, stetig und monoton* sein muß. Man nennt sie die *Parametertransformation*. Beim Bienenvergleich bedeutet die Stetigkeits- und Monotonieforderung, daß man den Film stets in einer Richtung laufen läßt, ohne zu unterbrechen, wobei auch keine Bilder oder gar Meter Filmstreifen aus dem Film geschnitten werden dürfen. Will man bei einer C^n-Kurve eine Parametertransformation durchführen.



$$\vec{x} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\vec{x} \longmapsto \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Es gibt viele Darstellungen:
Aus der KREISGLEICHUNG

$$x^2 + y^2 = r^2$$

folgt für den $\frac{1}{4}$ EINHEITSKREIS

$$\vec{x} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ \pm\sqrt{1-x^2} \end{pmatrix}$$

mit der Parametertransformation

$$\varphi(t) = \sin t$$

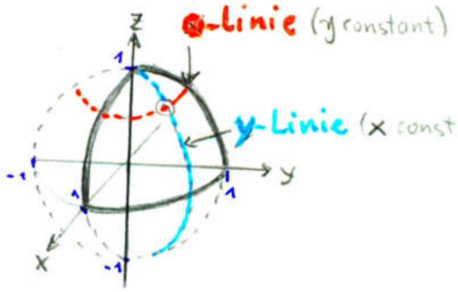
Ein weiteres Beispiel ist

$$\vec{x} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\vec{x} \longmapsto \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

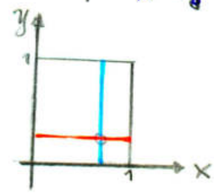
(-1,0) wird für $t \to \infty$ erreicht!

t ist dabei der y-Achsenschnitt der durch P und (-1,0) gehenden Geraden.

so muß auch $\varphi(t)$ n mal stetig differenzierbar sein, zusätzlich zur etwas strengeren Forderung, daß ihre erste Ableitung $\varphi'(t)$ nirgendwo Null werden darf.



$x^2+y^2+z^2=1$



Nun kann man den Film ja auch rückwärts laufen lassen, wobei die Bienenkurve dieselbe bleibt, nur eben rückwärts durchlaufen, was der Umkehrtransformation entspricht. Dabei ändert sich die Orientierung der Kurve allerdings.

$\vec{x}: [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \sin x \cos y \\ \sin x \sin y \\ \cos x \end{pmatrix}$

Den 1. Oktanden der EINHEITSKUGEL wird explizit durch

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1-u^2-v^2} \end{pmatrix}$

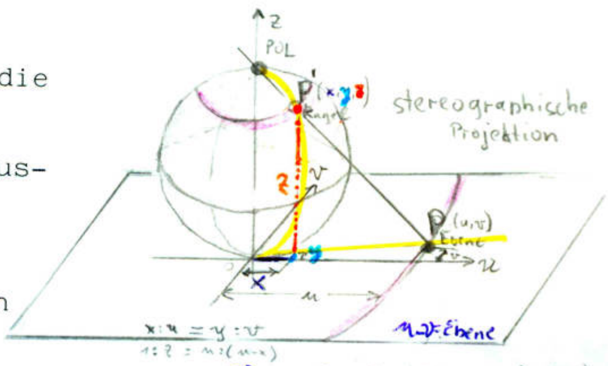
dargestellt. Umparametrisierung $\varphi(x,y) = (\sin x, \cos y)$

Bildet man nun die Ableitungen der transformierten Funktion, so ergibt sich für die erste Ableitung noch einen recht einfachen Zusammenhang, nämlich wegen

$$\frac{d\vec{x^*}}{dt^*} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{dt^*}$$

$$\vec{x^*}' = \vec{x}' \cdot \varphi'$$

Bei höheren Ableitungen wird er jedoch zusehends schwieriger.



Was passiert eigentlich, wenn die Biene bei ihrem Flug plötzlich keine Flügeltätigkeiten mehr ausübt? Fliegt sie dann trotzdem noch weiter und wenn ja, in welche Richtung fliegt sie dann weiter? Nun, die Biene fliegt

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

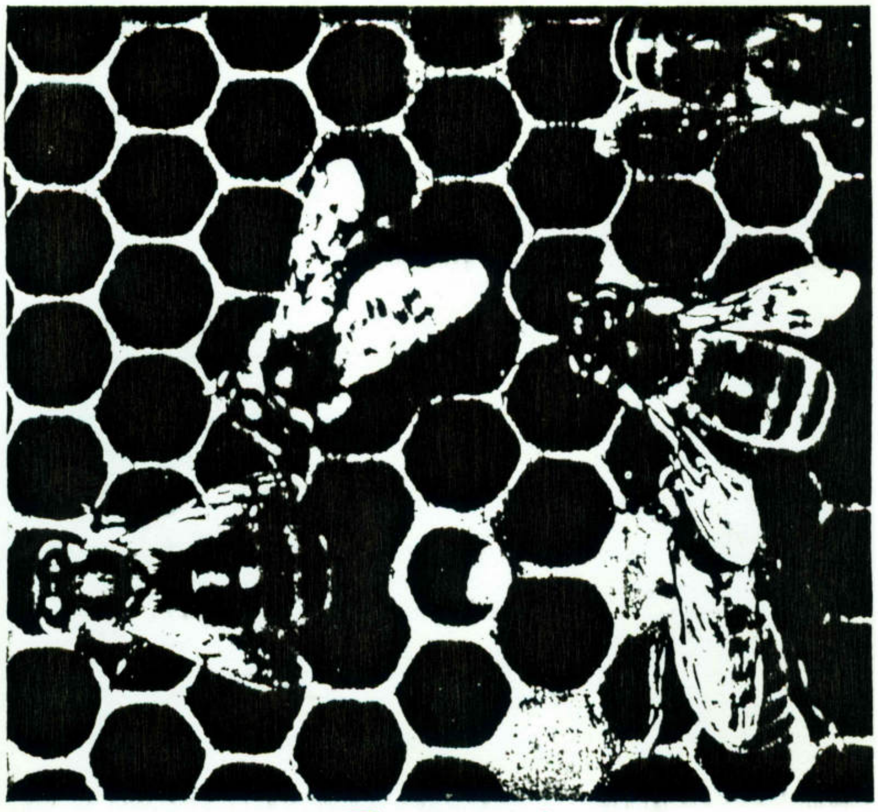
$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{1+u^2+v^2}\begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ u^2+v^2-1 \end{pmatrix}$

Pol P_{Ebene}

$\mathbb{R}^2 \leftrightarrow S_2$ (Kugel um 0 mit r=1)

Die ganze Ebene wird auf die Einheitskugel S_2^1 abgebildet, wobei der Pol das Unendlichenbild ist.

dann "tangiental" zur Bahn-
kurve weiter, straks geradeaus,
ohne die Richtung zu ändern,
dem Trägheitsgesetz entsprechend.



Was erzählen die Tänze der Bienen?

Hugo Edgar **Wehrle** Oberdorfstr. 30 78 224 Singen
☎ 07731- 41 41 8 ✉ H_Wehrle@email.de