Kurventheorie

6. Kanonische Darstellung

Die Bogenlänge als "natürlicher" Parameter

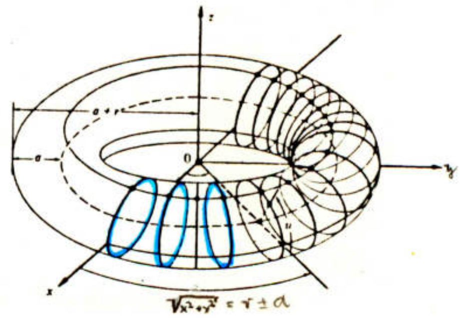
Es hat sich als sehr nützlich erwiesen, Kurven durch ihre Bogenlänge zu parametrisieren. Die Formeln werden dadurch wesentlich einfacher und überschaubarer, und die Zusammenhänge treten klarer hervor. Gerade die geschicktere Anordnung oder Darstellung ist wichtig für die Mathematik.

Bezeichnet nun s die Länge des Bogenstücks der Kurve, vom Startpunkt $\vec{x}(a)$ ausgerechnet mit $s(t)$, so erfüllt diese alle Forderungen einer Parametertransformation, da die Bogenlänge streng monoton wächst und ihre Ableitung $s'(t) = |\vec{x}'(t)|$ für reguläre Kurven nie Null wird. Dieser neue Bogenlängenparameter heißt nun natürlicher oder kanonischer Parameter.

Die Ableitung einer natürlich parametrisierten Kurve, die *zur Unterscheidung von den sonst üblichen Strichen mit einem Punkt gekennzeichnet* wird, ist nun betragsmäßig stets konstant eins:

$$|\dot{\vec{x}}(s)| \equiv 1$$

Die Kurve kann also als mit konstanter



Die Torus(Ring)fläche ist gegeben durch

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} (a + r\cos u)\cos v \\ (a + r\cos u)\sin v \\ r\sin u \end{pmatrix}$$

Hierbei sind

$$u \mapsto \begin{pmatrix} a + r\cos u \\ r\sin u \end{pmatrix}$$

Kreise in einer durch z gehenden und auf der (x,y)-Ebene senkrecht stehenden Ebene.

1. Guldinsche Regel für die Flächenberechnung einer Drehfläche:

Die Fläche ergibt sich als Produkt der Bogenlänge der die Rotationsfläche erzeugenden Kurve und dem Umfang des Schwerpunktkreises.

Beispiel TORUSfläche:

Der Torus entsteht durch Rotation eines Kreises mit dem Radius r um eine Achse, im Abstand $a > r$ zur Kreismitte (=Schwerpunkt). Somit wird die Oberfläche des Torus

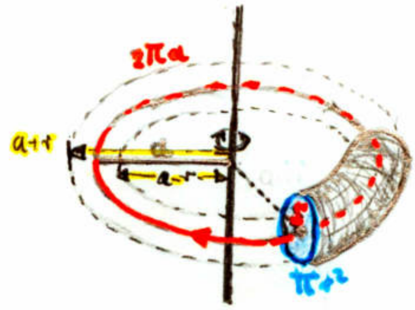
$$O = 2\pi r \cdot 2\pi a = 4\pi^2 ar .$$

Geschwindigkeit eins durchlaufen gedacht werden.

Geht man von der Gleichung $\dot{x}^2 \equiv 1$ aus, und leitet sie nochmals nach s ab, so erhält man

$$\dot{x} \cdot \ddot{x} \equiv 0$$

das zunächst verblüffende Ergebnis, daß *der zweite Ableitungsvektor stets senkrecht zum ersten Ableitungsvektor ist,* also senkrecht auf der Tangente steht.



2. Guldinsche Regel

Das ROTATIONSVOLUMEN ist das Produkt der erzeugenden Querschnittsfläche (im Beispiel πr^2) und ihres Schwerpunktweges (der hier $2\pi a$ ist):

$$V = \pi r^2 2\pi a = 2\pi^2 a r^2$$

TORUS VOLUMEN

Hugo Edgar **Wehrle** Oberdorfstr. 30 78 224 Singen
☎ 07731- 41 41 8 ✉ H_Wehrle@email.de