Kurventheorie

7. Die 2. Ableitung

Was bedeutet die zweite Ableitung einer Kurve?

Während die erste Ableitung nach dem Zeitparameter t die Durchlaufgeschwindigkeit der Kurve liefert, gibt die zweite die *Beschleunigung* an. Zunächst nochmals die erste Ableitung!

Betrachtet man in der Umgebung eines Kurvenpunktes $\vec{x}(t_0)$ die Verbindungsgeraden zu einem benachbarten Punkt $x(t_0 + \Delta t)$ und bildet den Grenzübergang, so daß t beliebig klein wird, so gehen diese Sekanten in die Kurventangente im Punkt $\vec{x}(t_0)$ über. Für eine reguläre Kurve ist die Tangente durch die erste Ableitung eindeutig bestimmt, wobei ihre Richtung gerade

$$\vec{x}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(t_0+\Delta t) - \vec{x}(t_0)}{\Delta t}$$

ist. Diese ist unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung und zeigt in dieselbe Richtung, die man erhält, wenn man auf der Kurve schreitend den Parameterwert vergrößert (Abb. 19).

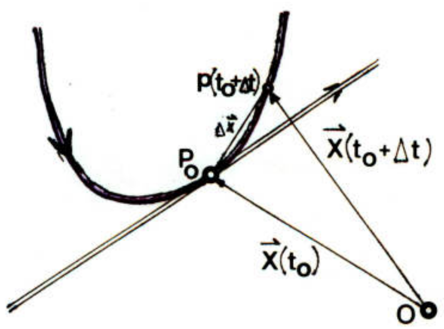

Abb. 19: Die erste Ableitung der Kurve liefert die Tangentenrichtung

Bei natürlichem Paramter ist nun die erste Ableitung stets ein Einheitsvektor, also der Länge eins. Die zweite Ableitung verschwindet aber dennoch nicht, da die Richtungsänderung mit in die Rechnung eingeht.

Diese Richtungsänderung der Tangenten ist nun gerade die "Kurvenbeschleunigung", während bei beliebigem Parameter die Beschleunigung in zwei zueinander senkrechten Komponenten zerlegt wird, in die Bahn- und Normalbeschleunigung. Dabei *gibt die Bahnbeschleunigung die Geschwindigkeitszuwachsrate des Kurvendurchlaufens an, während die dazu senkrechte Komponente in normaler Richtung die Richtungsänderung bewirkt* und somit alleine für die Kurvenkrümmung verantwortlich ist.

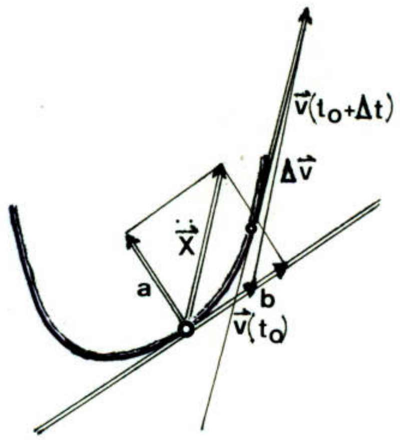

Abb. 20: a: Normalkomponente der Beschleunigung
b: Bahnbeschleunigungsanteil
Beschleunigungsvektor einer positiv gekrümmten Kurve

Bei Geradenstücken ist diese Richtungsänderung und somit die Krümmung null. Man schreibt für die Krümmung den griechischen Buchstaben Kappa $\varkappa$. Als Krümmungsmaß einer Kurve dient nun der Betrag der zweiten Ableitung $\ddot{\vec{x}}(s)$ einer natürlichen parametrisierten Kurve,

$$|\varkappa(s)| = |\ddot{\vec{x}}(s)|$$

wobei die Krümmung als positiv oder negativ angesehen werden kann, jenachdem, ob sich die Kurve nach links oder rechts zur fortschreitenden Tangentenrichtung wendet (Abb. 20).

Hugo Edgar **Wehrle** Oberdorfstr. 30 78 224 Singen
☎ 07731- 41 41 8 ✉ H_Wehrle@email.de