

# Kurventheorie

## *8. Was ist Krümmung*

Wie kann man die Krümmung einer Kurve noch charakterisieren?

Betrachtet man die Tangenten eines Kurvenbogens, so bilden sie mit einer beliebig, aber fest vorgegebenen Richtung einen Winkel (Abb. 21). Die Änderung dieses Tangentenwinkels beschreibt nun das Krümmungsverhalten der Kurve. Analog dazu, wie sich die mittlere Geschwindigkeit bei einer Wegstrecke zu

$$v_d = \frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{v(s + \Delta s) - v(s)}{\Delta s}$$

ergibt, ist die mittlere Krümmung

$$\kappa_d = \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{\alpha(s + \Delta s) - \alpha(s)}{\Delta s}$$

Entsprechend ergibt sich nun die momentane Beschleunigung als Grenzwert davon, wenn die Streckendifferenz beliebig klein wird.

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \dot{\alpha}$$

Die Krümmung ist also gerade die erste Ableitung des Tangentenwinkels  $\alpha(s)$  nach der Bogenlänge  $s$ . Sie ist als Winkelgeschwindigkeit der Tangenteinheitsvektoren ein Maß für die Abweichung der Kurve von der geradlinigen Tangentenrichtung. Die einzigen Kurven mit überall identisch verschwindender Krümmung sind die Geraden, und konstante, nicht verschwindende Krümmung haben nur die Kreise (in ebenem Fall). Die Kreisrümmung ist dabei gerade gleich dem Kehrwert des Kreisradius:  $\kappa = \frac{1}{r}$ . Je kleiner der Kreis also ist, desto

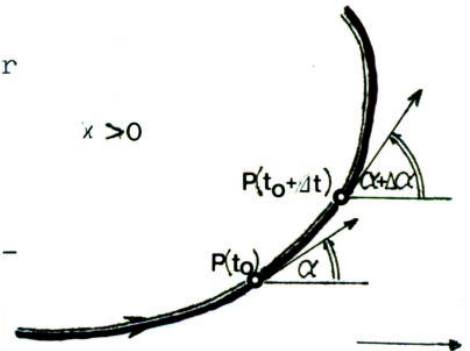


Abb. 21: Tangenzendrehwinkel  $\alpha$  und Krümmung der Kurve

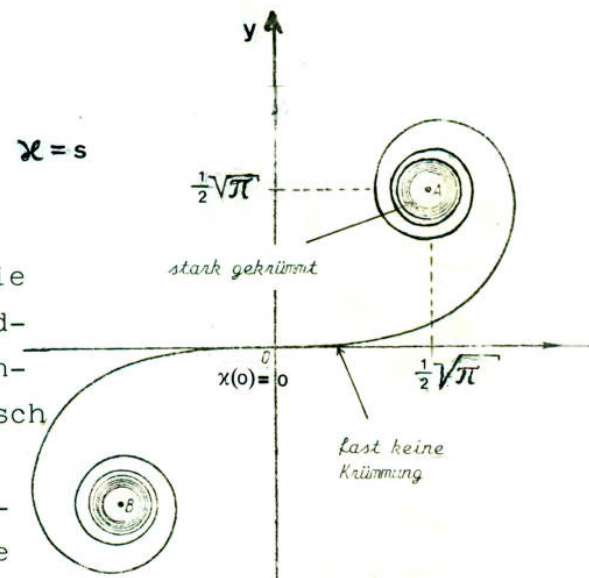


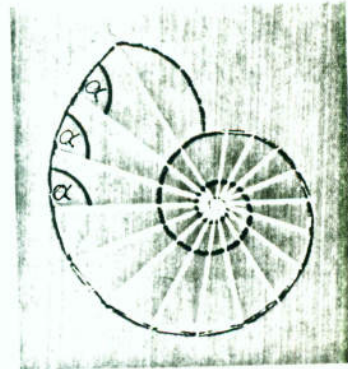
Abb. 22: Bei der nach dem franz. Physiker A. Cornu (1874) benannten Spirale wächst die Krümmung proportional zur Bogenlänge (im 3. Quadrat ist negativ). A und B sind asymptotische Punkte

stärker ist er gekrümmt, und je größer sein Radius ist, desto kleiner ist seine Krümmung, die im Grenzfall der Geraden verschwindet.

Nun gibt es auch Kurven, die sich ständig stärker krümmen, die also mit zunehmender Bogenlänge  $s$  auch ein *fortwährendes Krümmungswachstum* aufweisen. Solche Kurven heißen *Spiralen*. Als Beispiel dienen die *Connusche Spirale* der Abb. 22, deren Krümmung proportional zur Bogenlänge ist.

Bogenstücke von dieser sich gleichmäßig stärker krümmenden Kurve finden *im Straßenbau Anwendung*, wenn etwa zwei kreisbogenförmige Straßen so miteinander verbunden werden sollen, daß der Einschlagwinkel für die Lenkung des Kraftfahrzeuges proportional zur durchfahrenen Wegstrecke vergrößert werden muß, bis er beim zweiten Kreisbogen wieder konstant ist.

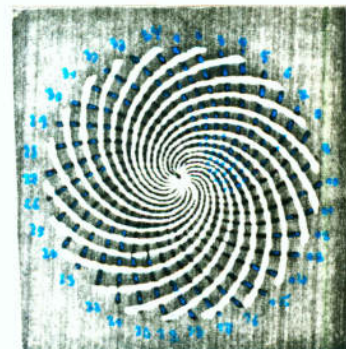
Was geschieht, wenn die Krümmung vom Positiven über eine Nullstelle zum Negativen wechselt oder umgekehrt? Jedenfalls ändert sich dabei das Krümmungsverhalten. Die rechts gekrümmte (math. pos.) Kurve wechselt zur linksgekrümmten Kurve über. Den Punkt nun, bei dem die Krümmung ver-



Logarithmische SPIRALE



NAUTILUS



Gänseblümchen-Kopf

21 Spiralen im UHRZEIGERSINN  
34 gegenständig

schwindet, wo also eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat, nennt man *Wendepunkt*. Im Falle der Cornuspirale ist der Ursprung der einzige Wendepunkt.

Was passiert aber, wenn die Krümmung unendlich wird? Dort ist dann der Kehrwert der Krümmung, der sog. *Krümmungsradius* "rho"  $\rho = \frac{1}{\kappa}$  null, und diese Stelle mit verschwindendem Krümmungskreis sind *Spitzen*; das sind *Umkehr-* oder *Rückkehrpunkte*, weil die Kurve dort um  $180^\circ$  dreht (Abb. 23). Die beiden *Wickelpunkte* der Cornuspirale bei  $A(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}; \frac{1}{2}\sqrt{\pi})$  und  $B(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}; -\frac{1}{2}\sqrt{\pi})$  sind andere Beispiele für Punkte mit unendlicher Krümmung.

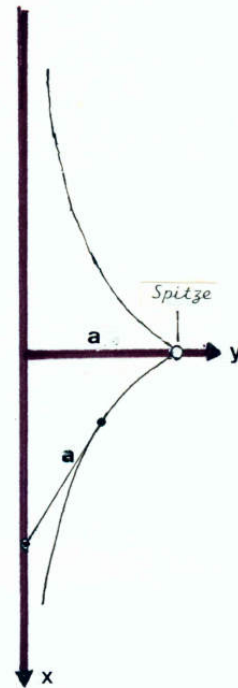


Abb. 23: Die TRAKTRIX (Schleppkurve) hat konstanten Tangentenabschnitt  $a$ . Spitze bei  $y = 0$  auf  $x$ -Achse

1. Was ist eine Kurve?	1
2. Pathologische Kurven	5
3. Was ist eine Parametertransformation?	14
4. Die Tangente ... ..	18
5. Wie kann man die Länge einer Kurve berechnen?	19
6. Die Bogenlänge als natürlicher Parameter.. . . .	24
7. Was bedeutet die zweite Ableitung?	26
<b>8. Wie kann man die Krümmung noch charakterisieren?</b>	<b>28</b>
9. Wir bewegen das Bezugssystem mit	31
10. Was ist das Tangentenbild?	32
11. Legt die Krümmung die Kurve eindeutig fest?	34
12. Wann berühren sich zwei Kurven?	37
13. Was ist ein Krümmungskreis? . . . . .	41
14. Die Evolute	47
15. Die-Involute.	55
16. Unterschied zwischen lokal und global?.	58
17. Der Jordansche Kurvensatz..	60
18. Was ist Topologie? . . . . .	64
19. Die Windungszahl . . . . .	70
20. Projektive und nichteuklidische Geometrie.	82
21. Die Tangentendrehzahl . . . . .	86
22. Was ist eine Eilinie? . . . . .	92
23. Wann ist eine Menge konvex? . . . . .	93
24. Eine Dimension höher . . . . .	102
25. Was sind Tangentenpolarkoordinaten?	115
26. Geometrische Bedeutungen von $h'$ und $h''$ ...	117
27. Der Flächeninhalt einer Eilinie.. . . . .	119
28. Hyperflächen . . . . .	124
29. Allgemeine Relativitäts-Theorie..	131
30. Durchmesser und Breite einer Eilinie	152
31. Was sind Gitterpunkte?.. . . . .	165
32. Wie heißt der Vierscheitelsatz? .. . . .	172
33. Gibt es Kreise, die fünf Ecken haben? ... ..	192
34. Wozu ist ein Gleichdick nütze?	200
35. Welche Eigenschaften haben Gleichdicke?	205
36. Was sind Zindlerkurven?. . . . .	210
37. Wer kennt Kakeyas Problem?	214
38. Raumkurven konstanter Breite..	218
39. Was versteht man unter Gesamtkrümmung?.	220
40. Verallgemeinerte Kurven konstanter Breite.	228
41. Gibt es auch Körper konstanter Breite?.	231
42. Kann man verbogene Flächen eben machen?..	234
43. Wozu stetige Vektorfelder?.	240
44. Die am besten untersuchten Flächen sind minimal.	244
45. Was versteht man unter Katastrophentheorie?..	270
46. Zum Schluss ein fünf-dimensionale Betrachtung.	281

Referenzen