Kurventheorie

8. Was ist Krümmung

Wie kann man die Krümmung einer Kurve noch charakterisieren?

Betrachtet man die Tangenten eines Kurvenbogens, so bilden sie mit einer beliebig, aber fest vorgegebenen Richtung einen Winkel (Abb. 21). Die Änderung dieses Tangentenwinkels beschreibt nun das Krümmungsverhalten der Kurve. Analog dazu, wie sich die mittlere Geschwindigkeit bei einer Wegstrecke zu

$$v_d = \frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{v(s+\Delta s) - v(s)}{\Delta s}$$

ergibt, ist die mittlere Krümmung

$$\varkappa_d = \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{\alpha(s+\Delta s) - \alpha(s)}{\Delta s}$$

Entsprechend ergibt sich nun die momentane Beschleunigung als Grenzwert davon, wenn die Streckendifferenz beliebig klein wird.

$$\varkappa(s) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \dot{\alpha}$$

Die Krümmung ist also gerade die erste Ableitung des Tangentenwinkels $\alpha(s)$ nach der Bogenlänge s. Sie ist als Winkelgeschwindigkeit der Tangenteneinheitsvektoren ein Maß für die Abweichung der Kurve von der geradlinigen Tangentenrichtung. Die einzigen Kurven mit überall identisch verschwindender Krümmung sind die Geraden, und konstante, nicht verschwindende Krümmung haben nur die Kreise (in ebenem Fall). Die Kreiskrümmung ist dabei gerade gleich dem Kehrwert des Kreisradius: $\varkappa = \frac{1}{r}$

Je kleiner der Kreis also ist, desto

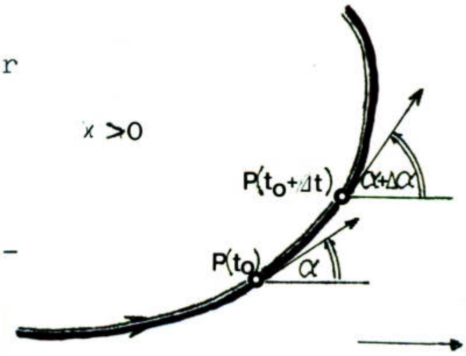


Abb. 21: Tangentendrehwinkel α und Krümmung der Kurve

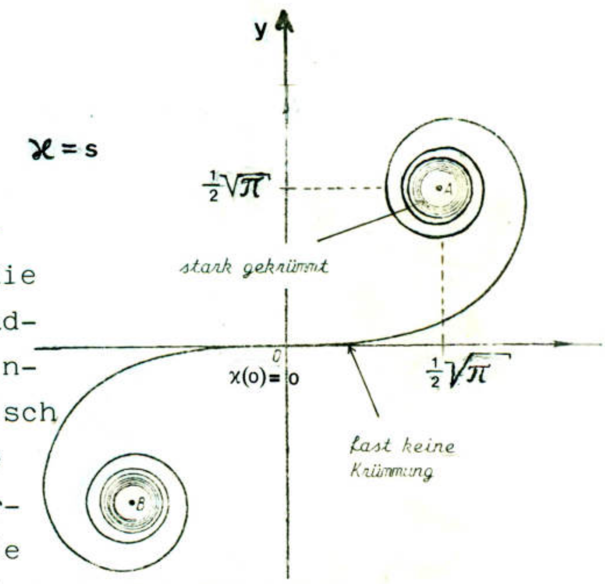


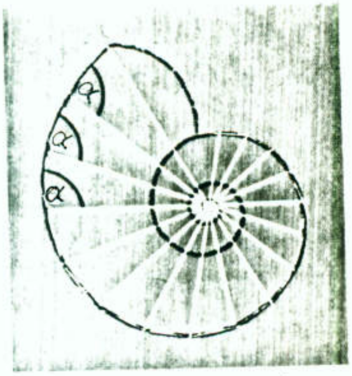
Abb. 22: Bei der nach dem franz. Physiker A. Cornu (1874) benannten Spirale wächst die Krümmung proportional zur Bogenlänge (im 3. Quadrat ist s negativ). A und B sind asymptotische Punkte

stärker ist er gekrümmt, und je größer sein Radius ist, desto kleiner ist seine Krümmung, die im Grenzfall der Geraden verschwindet.

Nun gibt es auch Kurven, die sich ständig stärker krümmen, die also mit zunehmender Bogenlänge s auch ein *fortwährendes Krümmungswachstum* aufweisen. Solche Kurven heißen *Spiralen*. Als Beispiel dienen die *Cornusche Spirale* der Abb. 22, deren Krümmung proportional zur Bogenlänge ist.

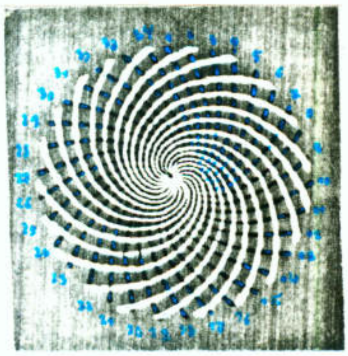
Bogenstücke von dieser sich gleichmäßig stärker krümmenden Kurve finden *im Straßenbau Anwendung*, wenn etwa zwei kreisbogenförmige Straßen so miteinander verbunden werden sollen, daß der Einschlagwinkel für die Lenkung des Kraftfahrzeuges proportional zur durchfahrenen Wegstrecke vergrößert werden muß, bis er beim zweiten Kreisbogen wieder konstant ist.

Was geschieht, wenn die Krümmung vom Positiven über eine Nullstelle zum Negativen wechselt oder umgekehrt? Jedenfalls ändert sich dabei das Krümmungsverhalten. Die rechts gekrümmte (math. pos.) Kurve wechselt zur linksgekrümmten Kurve über. Den Punkt nun, bei dem die Krümmung ver-



Logarithmische SPIRALE

NAUTILUS



Gänseblümchen-Kopf

21 Spiralen im UHRZEIGERSINN
34 gegensinnig

schwindet, wo also eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat, nennt man *Wendepunkt.* Im Falle der Cornuspirale ist der Ursprung der einzige Wendepunkt.

Was passiert aber, wenn die Krümmung unendlich wird? Dort ist dann der Kehrwert der Krümmung, der sog. *Krümmungsradius* "rho" $\rho = \frac{1}{\kappa}$ null, und diese Stelle mit verschwindendem Krümmungskreis sind *Spitzen;* *das sind Umkehr- oder Rückkehrpunkte,* weil die Kurve dort um 180° dreht (Abb. 23). Die beiden *Wickelpunkte* der Cornuspirale bei A $(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}; \frac{1}{2}\sqrt{\pi})$ und B$(-\frac{1}{2}\sqrt{\pi}; -\frac{1}{2}\sqrt{\pi})$ sind andere Beispiele für Punkte mit unendlicher Krümmung.

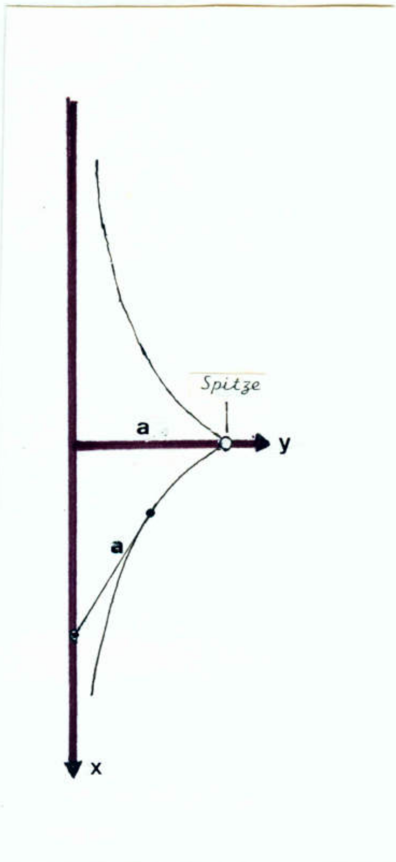


Abb. 23: Die TRAKTRIX (Schleppkurve) hat konstanten Tangentenabschnitt a. Spitze bei y = 0 auf x-Achse

Hugo Edgar **Wehrle** Oberdorfstr. 30 78 224 Singen
☎ 07731- 41 41 8 ✉ H_Wehrle@email.de