

Kurventheorie

11. Ist eine Kurve durch ihre Krümmung festgelegt ?

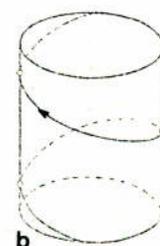
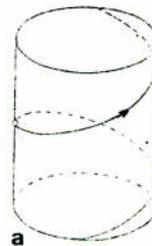
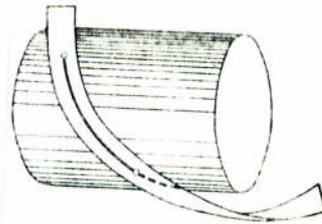
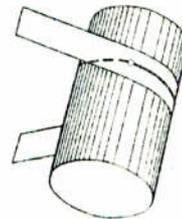
Wird durch die Krümmung die Kurve eindeutig festgelegt?

Im Falle der ebenen Kurven ist die Krümmungsfunktion $\kappa(s)$ charakteristisch für die Kurven, während für Raumkurven noch eine zweite Art Krümmung, nämlich die Windung $\tau(s)$ hinzukommt. Ist also für jede Bogenlänge s des ebenen Kurvenbogens in dessen Endpunkt die Krümmung $\kappa(s)$ bekannt, so ist die Kurve dadurch eindeutig festgelegt, von einer Bewegung in der Ebene abgesehen. Bewegungen sind orientierungserhaltende Kongruenzabbildungen, d.h. Verschiebungen und Drehungen. Jede Kurve ist also durch die sog. natürliche Gleichung

$$\kappa = \kappa(s)$$

ihrer Gestalt nach vollständig festgelegt. Der Begriff natürliche Gleichung stammt von dem italienischen Mathematiker E. Cesaro (1859–1906).

Für einen anderen als den natürlichen Parameter wird durch die Krümmungsfunktion $\kappa = \kappa(s)$ die Kurve nicht eindeutig festgelegt. Dazu müßte man noch die Durchlaufgeschwindigkeit $|\dot{\vec{x}}(t)|$



a) weinwendig, da positiv
gewunden
b) hopfenwendig

Abb. 26: Zylinderkurven sind "doppelgekrümmte Kurven".

kennen.

Bei räumlichen Kurven genügt die natürliche Gleichung aber nicht mehr, wie bereits am Anfang erwähnt wurde. Beispielsweise haben alle Zylinderkurven dieselbe Krümmung (Abb. 26), nämlich die konstante Krümmung der Grundkreislinie. Die neue typisch räumliche Größe, die hier noch hinzukommt, ist eben die Windung oder Torsion τ (sprich 'Tau'). Durch diese beiden Krümmungsfunktionen $\kappa = \kappa(s)$ und $\tau = \tau(s)$ ist nun jede Kurve bis auf die Lage im Raum eindeutig bestimmt. Im n-dimensionalen Raum sind entsprechend n-1 natürliche Gleichungen zur Charakterisierung notwendig.

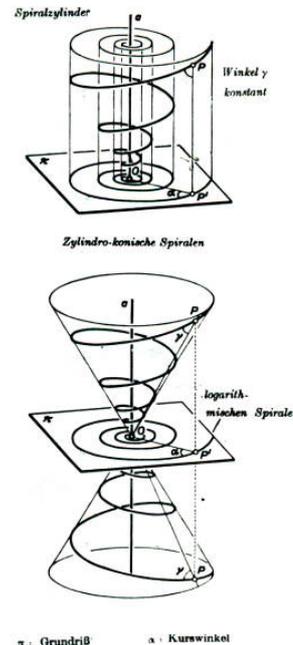


Abb. 26c:
Zylinderlozodrome [geodätische Linie]
Drehkegellozodrome

Wann berühren sich zwei Kurven?

Zunächst einmal können sich zwei Kurven schlicht kreuzen, und man sagt, sie *schneiden sich* in einem Punkt ("einpunktige Berührung"). Die beiden Kurven können aber im gemeinsamen Punkt auch noch eine gemeinsame Tangente besitzen. Sie laufen dann ein kleines Stück in dieselbe Richtung und man spricht dann vom Berührungspunkt statt vom Schnittpunkt. Obwohl es aber nur ein einziger Punkt ist, nennt man sie auch zweipunktige Berührung.

Wird bei einem Kreis in der x/y -Grundebene eine sich kontinuierlich ändernde z-Koordinate zugefügt

$$\vec{x} \rightarrow \begin{pmatrix} r \sin t \\ r \cos t \\ z \end{pmatrix} \quad z: \text{konstante}$$

so erhält man eine Schraubenlinie
Sie hat die konstante Krümmung $\kappa = \frac{r}{r^2 + z'^2}$
und konstante Windung (TORSION).

1. Was ist eine Kurve?	1
2. Pathologische Kurven	5
3. Was ist eine Parametertransformation?	14
4. Die Tangente	18
5. Wie kann man die Länge einer Kurve berechnen?	19
6. Die Bogenlänge als natürlicher Parameter..	24
7. Was bedeutet die zweite Ableitung?	26
8. Wie kann man die Krümmung noch charakterisieren?	28
9. Wir bewegen das Bezugssystem mit	31
10. Was ist das Tangentenbild?	32
11. Legt die Krümmung die Kurve eindeutig fest?	34
12. Wann berühren sich zwei Kurven?	37
13. Was ist ein Krümmungskreis?	41
14. Die Evolute	47
15. Die-Involute.	55
16. Unterschied zwischen lokal und global?.	58
17. Der Jordansche Kurvensatz..	60
18. Was ist Topologie?	64
19. Die Windungszahl	70
20. Projektive und nichteuklidische Geometrie.	82
21. Die Tangentendrehzahl	86
22. Was ist eine Eilinie?	92
23. Wann ist eine Menge konvex?	93
24. Eine Dimension höher	102
25. Was sind Tangentenpolarkoordinaten?	115
26. Geometrische Bedeutungen von h' und h'' ..	117
27. Der Flächeninhalt einer Eilinie..	119
28. Hyperflächen	124
29. Allgemeine Relativitäts-Theorie..	131
30. Durchmesser und Breite einer Eilinie	152
31. Was sind Gitterpunkte?..	165
32. Wie heißt der Vierscheitelsatz?	172
33. Gibt es Kreise, die fünf Ecken haben?	192
34. Wozu ist ein Gleichdick nütze?	200
35. Welche Eigenschaften haben Gleichdicke?	205
36. Was sind Zindlerkurven?..	210
37. Wer kennt Kakeyas Problem?	214
38. Raumkurven konstanter Breite..	218
39. Was versteht man unter Gesamtkrümmung?.	220
40. Verallgemeinerte Kurven konstanter Breite.	228
41. Gibt es auch Körper konstanter Breite?.	231
42. Kann man verbogene Flächen eben machen?..	234
43. Wozu stetige Vektorfelder?.	240
44. Die am besten untersuchten Flächen sind minimal.	244
45. Was versteht man unter Katastrophentheorie?..	270
46. Zum Schluss ein fünf-dimensionale Betrachtung.	281

Referenzen