# Kurventheorie

## 12. Berührung zweier Kurven

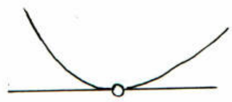
# Wann berühren sich zwei Kurven?

Zunächst einmal können sich zwei Kurven schlicht kreuzen, und man sagt, sie *schneiden sich* in einem Punkt ("einpunktige Berührung"). Die beiden Kurven können aber im gemeinsamen Punkt auch noch eine gemeinsame Tangente besitzen. Sie laufen dann ein kleines Stück in dieselbe Richtung und man spricht dann vom Berührpunkt statt vom Schnittpunkt. Obwohl es aber nur ein einziger Punkt ist, nennt man sie auch zweipunktige Berührung.

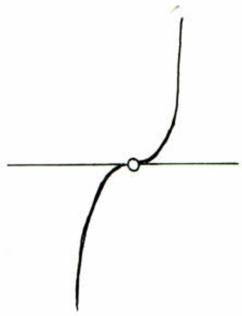
Nun können sich aber zwei Punkte noch besser annähern, lokal in einem Punkt noch besser übereinstimmen, d.h. in einer kleinen Umgebung des gemeinsamen Punktes in noch weiteren Stücken identisch sein. Beispielsweise können die beiden Kurven außer der gemeinsamen Tangente im Berührpunkt, wo im wesentlichen die ersten Ableitungen übereinstimmen, auch noch in der zweiten Ableitung übereinstimmen, sofern diese auf die jeweilige Bogenlänge bezogen ist. Dann weisen beide Kurven dort auch noch die gleiche Krümmung auf. Man spricht von einer *Berührung zweiter Ordnung*, von *dreipunktiger* oder *stationärer Berührung* und nennt sie auch *Oskulation* (nach Spivak bedeutet "oskulieren" küssen!). Eine Berührung dritter Ordnung, also eine vierpunktive Berührung wird manchmal auch als *Hyperoskulation* bezeichnet, und ich möchte mir hierfür das Wort *"Schmiegung"* aufbewahren. Dabei müssen nun auch noch die dritten Ableitungen nach der Bogenlänge übereinstimmen.
*Allgemein berühren sich zwei Kurven in* (genau) *n-ter Ordnung, wenn* (nur) *die ersten n-Ableitungen nach den jeweiligen natürlichen Parametern übereinstimmen.* Wie bereits gesagt, spricht man auch von einer *n+1-punktigen Berührung,* obwohl nur ein Berührpunkt


Abb. 27: Ein-, zwei-, drei- und vierpunktige Berührung zweier Kurven

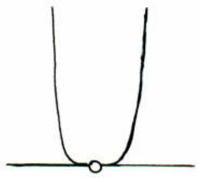
vorliegt (Abb. 27). Ist nun eine der beiden Kurven eine Gerade, so ergibt eine genau zweipunktige Berührung gerade eine *gewöhnliche Tangente* an die Kurve (Abb. 28a). Bei genau dreipunktiger Berührung (zweiter Ordnung) muß die zweite Ableitung der Kurve im Berührpunkt verschwinden und somit die Kurvenkrümmung null sein, d.h. es liegt ein Wendepunkt vor und die Gerade ist *Wendetangente* (Abb. 28b). Bei genau vierpunktiger Berührung muß nun auch die dritte Ableitung null werden, da bei einer Geraden sämtliche höheren Ableitungen identisch verschwinden. Dann spricht man von einer *Flachtangente* wie z.B. bei der Parabel vierter Ordnung $y = x^4$ im Ursprung (Abb. 28c). Von genau fünfter Ordnung berührende Geraden sind dann wieder Wendetangenten usw.



a) erste



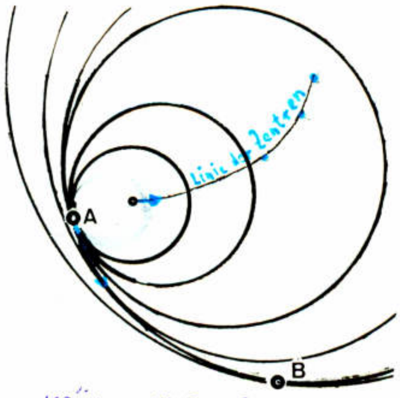
b) zweite



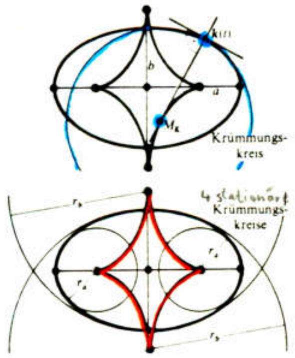
c) dritte

Abb. 28: Geradenberührung verschiedener Ordnung

Wenn sich nun zwei Kurven in einem Punkt berühren, wie verhalten sie sich dann in der nächsten Umgebung des Berührpunktes B? Liegen beide Äste jeder Kurve auf derselben Seite der gemeinsamen Tangente oder nicht? Liegt die eine Kurve in der nächsten Umgebung vom Berührpunkt völlig in dem anderen Kurvenbogen oder durchsetzen sich beide Kurven? Nun, wenn beide Kurven lokal um B ineinander enthalten sind, so ist der eine Kurvenbogen vor, während und nach der Berührung stärker gekrümmt als der andere. Die Differenz derKrümmungen $x_1 - x_2$ hat dasselbe Vorzeichen. Durchläuft dagegen $x_1 - x_2$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel in B, wo gleiche Krümmung vorliegt, so durchsetzen sich die beiden Kurven. Eine weitere Überlegung ergibt, daß sich die berührenden Kurven nur dann durchsetzen, wenn eine Berührung geradzahliger Ordnung vorliegt, während sie sich für ungeradzahliges n nicht durchdringen. Im Falle, daß die eine Kurve ein berührender Kreis ist, folgt daraus beispielsweise, daß gewöhnliche Krümmungskreise die Kurve durchsetzen, wogegen die Schmiegkreise an den Scheitelpunkten dies nicht tun.




KRÜMMUNGSKREISE eines SPIRALBOGENS AB




Krümmungskreis bei der Ellipse

darunter die vier Scheitelkreise und Evolute (Linie der Mitten der Krümmungkreise)

Hugo Edgar **Wehrle** Oberdorfstr. 30 78 224 Singen
☎ 07731- 41 41 8 ✉ H_Wehrle@email.de