

Kurventheorie

12. Berührung zweier Kurven

Wann berühren sich zwei Kurven?

Zunächst einmal können sich zwei Kurven schlicht kreuzen, und man sagt, sie *schneiden sich* in einem Punkt ("einpunktige Berührung"). Die beiden Kurven können aber im gemeinsamen Punkt auch noch eine gemeinsame Tangente besitzen. Sie laufen dann ein kleines Stück in dieselbe Richtung und man spricht dann vom Berührungspunkt statt vom Schnittpunkt. Obwohl es aber nur ein einziger Punkt ist, nennt man sie auch zweipunktige Berührung.

Nun können sich aber zwei Punkte noch besser annähern, lokal in einem Punkt noch besser übereinstimmen, d.h. in einer kleinen Umgebung des gemeinsamen Punktes in noch weiteren Stücken identisch sein. Beispielsweise können die beiden Kurven außer der gemeinsamen Tangente im Berührungspunkt, wo im wesentlichen die ersten Ableitungen übereinstimmen, auch noch in der zweiten Ableitung übereinstimmen, sofern diese auf die jeweilige Bogenlänge bezogen ist. Dann weisen beide Kurven dort auch noch die gleiche Krümmung auf. Man spricht von einer *Berührung zweiter Ordnung*, von *dreipunktiger* oder *stationärer Berührung* und nennt sie auch *Oskulation*. (nach Spivak bedeutet "oskulieren" küssen!). Eine Berührung dritter Ordnung, also eine vierpunktige Berührung wird manchmal auch als *Hyperoskulation* bezeichnet, und ich möchte mir hierfür das Wort "*Schmiegun*g" aufbewahren. Dabei müssen nun auch noch die dritten Ableitungen nach der Bogenlänge übereinstimmen. Allgemein berühren sich zwei Kurven in (genau) n -ter Ordnung, wenn (nur) die ersten n -Ableitungen nach den jeweiligen natürlichen Parametern übereinstimmen. Wie bereits gesagt, spricht man auch von einer $n+1$ -punktigen Berührung, obwohl nur ein Berührungspunkt

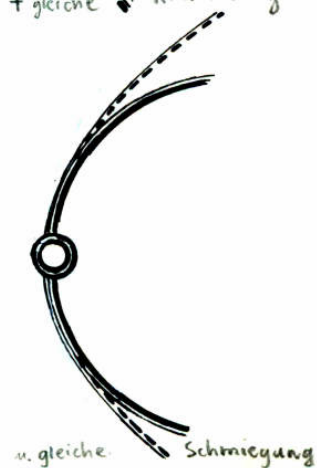
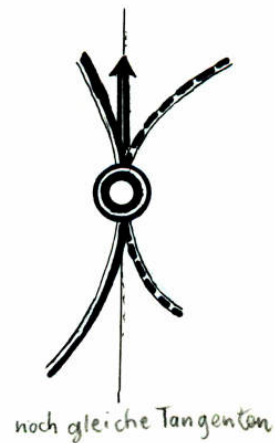
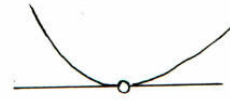
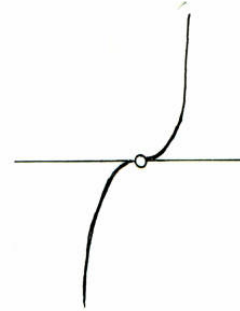


Abb. 27: Ein-, zwei-, drei- und vierpunktige Berührung zweier Kurven

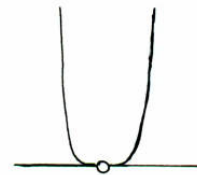
vorliegt (Abb. 27). Ist nun eine der beiden Kurven eine Gerade, so ergibt eine genau zweipunktige Berührung gerade eine *gewöhnliche Tangente* an die Kurve (Abb. 28a). Bei genau dreipunktiger Berührung (zweiter Ordnung) muß die zweite Ableitung der Kurve im Berührungspunkt verschwinden und somit die Kurvenkrümmung null sein, d.h. es liegt ein Wendepunkt vor und die Gerade ist *Wendetangente* (Abb. 28b). Bei genau vierpunktiger Berührung muß nun auch die dritte Ableitung null werden, da bei einer Geraden sämtliche höheren Ableitungen identisch verschwinden. Dann spricht man von einer *Flachtangente* wie z.B. bei der Parabel vierter Ordnung $y = x^4$ im Ursprung (Abb. 28c). Von genau fünfter Ordnung berührende Geraden sind dann wieder Wendetangenten usw.



a) erste



b) zweite

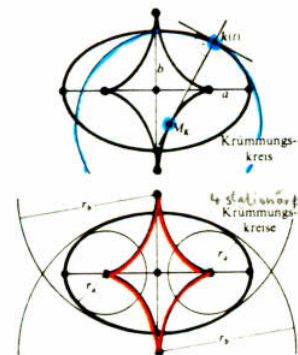
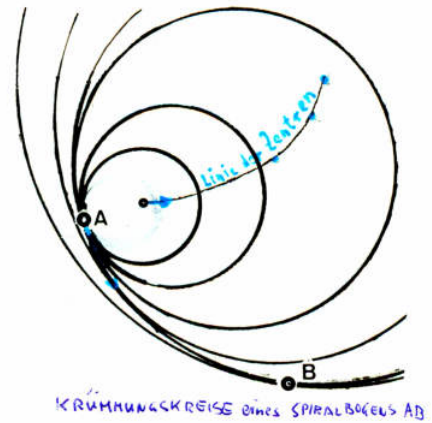


c) dritte

Wenn sich nun zwei Kurven in einem Punkt berühren, wie verhalten sie sich dann in der nächsten Umgebung des Berührungspunktes B? Liegen beide Äste jeder Kurve auf derselben Seite der gemeinsamen Tangente oder nicht? Liegt die eine Kurve in der nächsten Umgebung vom Berührungspunkt völlig in dem anderen Kurvenbogen oder durchsetzen sich beide Kurven? Nun, wenn beide Kurven lokal um B ineinander enthalten

Abb. 28: Geradenberührung verschiedener Ordnung

sind, so ist der eine Kurvenbogen vor, während und nach der Berührung stärker gekrümmt als der andere. Die Differenz der Krümmungen $x_1 - x_2$ hat dasselbe Vorzeichen. Durchläuft dagegen $x_1 - x_2$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel in B, wo gleiche Krümmung vorliegt, so durchsetzen sich die beiden Kurven. Eine weitere Überlegung ergibt, daß sich die berührenden Kurven nur dann durchsetzen, wenn eine Berührung geradzahligter Ordnung vorliegt, während sie sich für ungeradzahliges n nicht durchdringen. Im Falle, daß die eine Kurve ein berührender Kreis ist, folgt daraus beispielsweise, daß gewöhnliche Krümmungskreise die Kurve durchsetzen, wogegen die Schmiegkreise an den Scheitelpunkten dies nicht tun.



Krümmungskreis bei der Ellipse

darunter die vier Scheitelkreise und **Evolute** (Linie der Mitten der Krümmungskreise)

1. Was ist eine Kurve?	1
2. Pathologische Kurven	5
3. Was ist eine Parametertransformation?	14
4. Die Tangente	18
5. Wie kann man die Länge einer Kurve berechnen?	19
6. Die Bogenlänge als natürlicher Parameter..	24
7. Was bedeutet die zweite Ableitung?	26
8. Wie kann man die Krümmung noch charakterisieren?	28
9. Wir bewegen das Bezugssystem mit	31
10. Was ist das Tangentenbild?	32
11. Legt die Krümmung die Kurve eindeutig fest?	34
12. Wann berühren sich zwei Kurven?	37
13. Was ist ein Krümmungskreis?	41
14. Die Evolute	47
15. Die-Involute.	55
16. Unterschied zwischen lokal und global?.	58
17. Der Jordansche Kurvensatz..	60
18. Was ist Topologie?	64
19. Die Windungszahl	70
20. Projektive und nichteuklidische Geometrie.	82
21. Die Tangentendrehzahl	86
22. Was ist eine Eilinie?	92
23. Wann ist eine Menge konvex?	93
24. Eine Dimension höher	102
25. Was sind Tangentenpolarkoordinaten?	115
26. Geometrische Bedeutungen von h' und h'' ..	117
27. Der Flächeninhalt einer Eilinie..	119
28. Hyperflächen	124
29. Allgemeine Relativitäts-Theorie..	131
30. Durchmesser und Breite einer Eilinie	152
31. Was sind Gitterpunkte?..	165
32. Wie heißt der Vierscheitelsatz?	172
33. Gibt es Kreise, die fünf Ecken haben?	192
34. Wozu ist ein Gleichdick nütze?	200
35. Welche Eigenschaften haben Gleichdicke?	205
36. Was sind Zindlerkurven?..	210
37. Wer kennt Kakeyas Problem?	214
38. Raumkurven konstanter Breite..	218
39. Was versteht man unter Gesamtkrümmung?.	220
40. Verallgemeinerte Kurven konstanter Breite.	228
41. Gibt es auch Körper konstanter Breite?.	231
42. Kann man verbogene Flächen eben machen?..	234
43. Wozu stetige Vektorfelder?.	240
44. Die am besten untersuchten Flächen sind minimal.	244
45. Was versteht man unter Katastrophentheorie?..	270
46. Zum Schluss ein fünf-dimensionale Betrachtung.	281

Referenzen