Kurventheorie

13. Krümmungskreis ?

Was ist ein Krümmungskreis?

Berühren sich zwei verschieden große Kreise in einem Punkt, so ist diese Berührung von genau erster Ordnung, da beide Kurven gemeinsame Tangenten, aber verschiedene Krümmung aufweisen (Abb. 29a). Stellen wir uns nun vor, daß wir eine vorgegebene Kurve in einem bestimmten Kurvenpunkt P bestmöglich durch einen Kreisbogen anpassen wollen. Ebenso könnten wir etwa durch andere Kegelabschnitte wie Ellipsen oder Parabeln annähern, jedoch hat der Kreis den Vorteil, daß er in jedem seiner Punkte die gleiche Krümmung aufweist. Derjenige Kreis nun, der den Kurvenverlauf bei P am besten nachahmt, hat dort dieselbe Krümmung wie die Kurve. Deshalb nennt man ihn Krümmungskreis und sein Radius Krümmungsradius $\rho = 1/r$ (sprich:"rho"). Eine weitere Übereinstimmung als in der Krümmung ist i.a. nicht möglich (Abb. 29b).

a/

b/ Krümmungskreis

c/ Schmiegkreis

Abb. 29: Kreisberührung von genau 1., 2. und 3. Ordnung

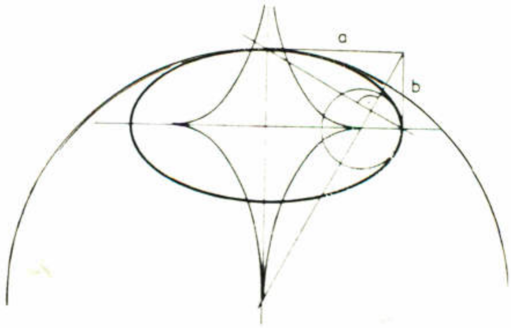
Den Krümmungskreis kann man dadurch erhalten, indem man drei Kurvenpunkte aus einer Umgebung des Berührpunktes, die nicht alle auf einer Geraden liegen sollen, herausgreift und den durch diese eindeutig bestimmten Kreis zeichnet. Läßt man nun diese Punkte immer näher an den Berührpunkt streben, so liefert der Grenzfall der zugehörigen Kreisschar gerade den Krümmungskreis. Er berührt die Kurve dreipunktig, also von zweiter Ordnung.

Wie sieht nun der Krümmungskreis aus, wenn die Kurvenkrümmung unendlich groß wird? Wie, wenn die Kurvenkrümmung verschwindet?

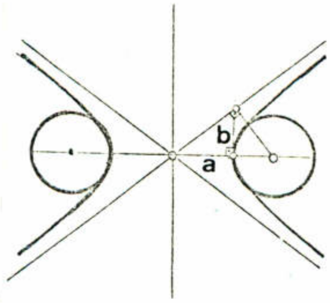
Ersteres liefert den Grenzfall eines Kreises, der zu einem Punkt, die sog. Spitze, zusammenschrumpft. Letzteres läßt den Kreis zu einer Geraden entarten. Ist nämlich die Krümmung $\varkappa = 0$, so ist ihr Kehrwert, also der Krümmungsradius, unendlich:

Wie findet man den Mittelpunkt des Krümmungskreises? Man trägt auf der Senkrechten zur Tangente vom Berührpunkt her die Strecke $\rho = \frac{1}{\varkappa}$ ab. Die Krümmungskreismitte ergibt sich also als Schnittpunkt der Normalen mit dem Kreis um B mit dem Radius

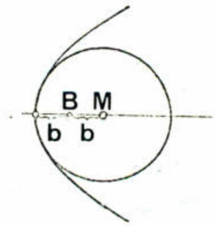
Als nächstes fragen wir uns, was denn ein *vierpunktiger berührender Kreis* ist? Es muß eine besondere Art von Krümmungskreis sein, den wir *Schmiegkreis* nennen wollen. Man sagt, daß stationäre Berührung vorliegt, da dort der Krümmungsradius bei Fortschreiten längs der



a)



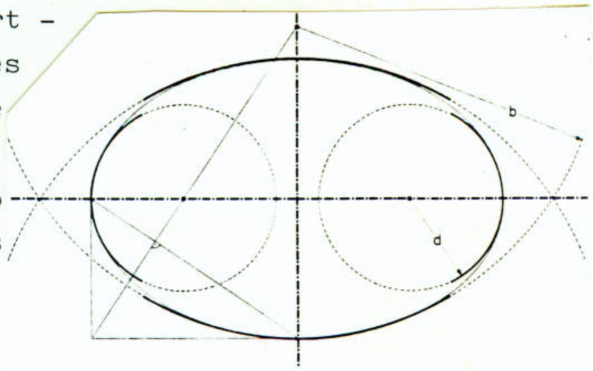
b)



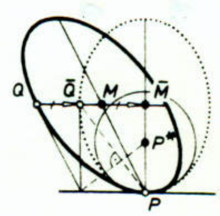
c)

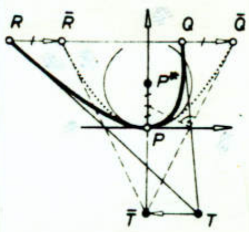
Abb. 30: Schmiegkreismittenkonstruktion von

a) Ellipse
b) Hyperbel
c) Parabel
(ϱ ist doppelte Brennpunktsentfernung vom Scheitel)



Kurve kaum einen Zuwachs erfährt - daher die gute Approximation des Kreises an die Kurve. Die Kurve weist dort nämlich gerade ein Krümmungsextremum auf, hat also an diesen Stellen ein relatives Minimum oder Maximum ihrer Krümmungsfunktion. Da die Differenz der Krümmungen vom Kreis und der Kurve eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel durchläuft, durchsetzen sich beide nicht, was für jede Berührung dritter Ordnung gilt (Abb. 29c). Solche Punkte, in denen die Krümmung extremal wird, in denen also die Ableitung von $\varkappa$ eine Nullstelle hat, heißen *Scheitelpunkte, kurz Scheitel* genannt. Es wird zunächst verblüffend sein, daß *jede einfach geschlossene glatte Kurve mindestens vier Scheitel besitzt*, d.h., daß sie zumindest vier sozusagen kreisähnliche Kurvenbogenstellen aufweist. Wir kommen darauf noch beim Vierscheitelsatz zu sprechen.





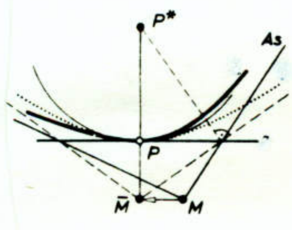


Abb. 31: Schmiegkreis bei einem affinen Kegelschnitt

Als abschließendes Beispiel sollen nun noch die Konstruktionen der Schmiegkreise an die Ellipse (Abb. 30a), Parabel (Abb. 30b) und Hyperbel (Abb. 30c) dargestellt werden. Die Aufgabe ist im wesentlichen mit dem Auffinden der Schmiegkreismitten

gelöst. Bei der Ellipse liegen die vier Scheitel auf den Hauptachsen und zwar ergeben sie sich als Schnitt mit den jeweiligen Geraden, die durch die Ecke des Halbachsenrechtecks gehen und dabei senkrecht auf der Verbindungsstrecke der zugehörigen Scheitelpunkte stehen. Bei der Parabel liegt die Scheitelmitte auf der Achse mit doppelter Brennweitenentfernung vom Scheitel. Auch bei der Hyperbel ergeben sich die Scheitelpunkte als Schnittpunkte mit den Achsen und die Mitten der Schmiegkreise werden als Schnitt dieser Achse mit der Senkrechten ihrer Asymptoten erhalten, wobei der Asymptotenpunkt als Lotfußpunkt gerade den Scheitel ergibt. Eine Konstruktion des Krümmungskreises in einer beliebigen algebraischen Kurve bel. Ordnung (=allgemeine Konstruktion des Krümmungskreises) ergibt sich mittels einer Äquitangentialkurve nach dem Satz des Nikolaides:
Der Mittelpunkt des Krümmungskreises in P ist der Schnittpunkt zusammengehöriger Normalen der Kurve und ihrer Äquitangentialen (Abb. 32). Eine Äquitangentiale ist dabei der Ort aller Punkte, die auf den Kurventangenten liegen und **von** dem jeweiligen Berührpunkt stets gleichweit entfernt sind.

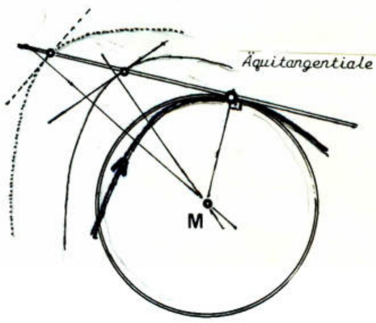


Abb. 32: Krümmungskreiskonstruktion mittels Äquitangentiale

Hugo Edgar **Wehrle** Oberdorfstr. 30 78 224 Singen
☎ 07731- 41 41 8 ✉ H_Wehrle@email.de