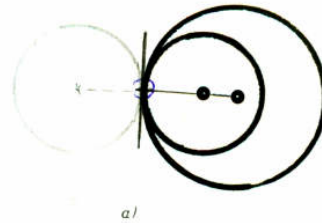


Kurventheorie

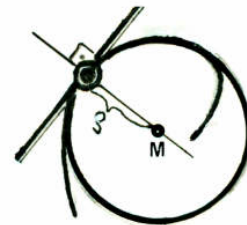
13. Krümmungskreis ?

Was ist ein Krümmungskreis?

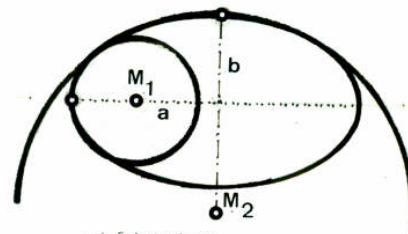
Berühren sich zwei verschieden große Kreise in einem Punkt, so ist diese Berührung von genau erster Ordnung, da beide Kurven gemeinsame Tangenten, aber verschiedene Krümmung aufweisen (Abb. 29a). Stellen wir uns nun vor, daß wir eine vorgegebene Kurve in einem bestimmten Kurvenpunkt P bestmöglich durch einen Kreisbogen anpassen wollen. Ebenso könnten wir etwa durch andere Kegelabschnitte wie Ellipsen oder Parabeln annähern, jedoch hat der Kreis den Vorteil, daß er in jedem seiner Punkte die gleiche Krümmung aufweist. Derjenige Kreis nun, der den Kurvenverlauf bei P am besten nachahmt, hat dort dieselbe Krümmung wie die Kurve. Deshalb nennt man ihn Krümmungskreis und sein Radius Krümmungsradius $\rho = 1/r$ (sprich: "rho"). Eine weitere Übereinstimmung als in der Krümmung ist i.a. nicht möglich (Abb. 29b).



a)



b) Krümmungskreis



c) Schmiegekreis

Den Krümmungskreis kann man dadurch erhalten, indem man drei Kurvenpunkte aus einer Umgebung des Berührungspunktes, die nicht alle auf einer Geraden liegen sollen, herausgreift und den durch diese eindeutig

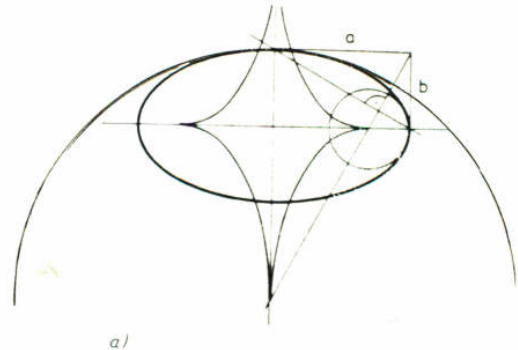
Abb. 29: Kreisberührung von genau 1., 2. und 3. Ordnung

bestimmten Kreis zeichnet. Läßt man nun diese Punkte immer näher an den Berührungspunkt streben, so liefert der Grenzfall der zugehörigen Kreisschar gerade den Krümmungskreis. Er berührt die Kurve dreipunktig, also von zweiter Ordnung.

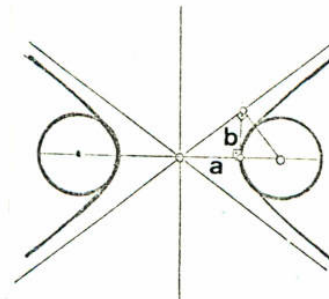
Wie sieht nun der Krümmungskreis aus, wenn die Kurvenkrümmung unendlich groß wird? Wie, wenn die Kurvenkrümmung verschwindet?

Ersteres liefert den Grenzfall eines Kreises, der zu einem Punkt, die sog. Spitze, zusammenschrumpft. Letzteres läßt den Kreis zu einer Geraden entarten. Ist nämlich die Krümmung $\kappa = 0$, so ist ihr Kehrwert, also der Krümmungsradius, unendlich:

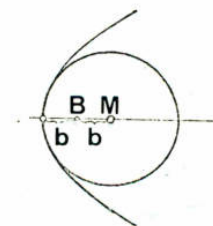
Wie findet man den Mittelpunkt des Krümmungskreises? Man trägt auf der Senkrechten zur Tangente vom Berührungspunkt her die Strecke $\rho = \frac{1}{\kappa}$ ab. Die Krümmungskreismitte ergibt sich also als Schnittpunkt der Normalen mit dem Kreis um B mit dem Radius ρ . Als nächstes fragen wir uns, was denn ein *vierpunktiger berührender Kreis* ist? Es muß eine besondere Art von Krümmungskreis sein, den wir *Schmiegekreis* nennen wollen. Man sagt, daß stationäre Berührung vorliegt, da dort der Krümmungsradius bei Fortschreiten längs der



a)



b)



c)

Abb. 30: Schmiegekreismittekonstruktion von

- a) Ellipse
 - b) Hyperbel
 - c) Parabel
- (a ist doppelte Brennpunktentfernung vom Scheitel)

Kurve kaum einen Zuwachs erfährt - daher die gute Approximation des Kreises an die Kurve. Die Kurve weist dort nämlich gerade ein Krümmungsextremum auf, hat also an diesen Stellen ein relatives Minimum oder Maximum ihrer Krümmungsfunktion. Da die Differenz der Krümmungen vom Kreis und der Kurve eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel durchläuft, durchsetzen sich beide nicht, was für jede Berührung dritter Ordnung gilt (Abb. 29c). Solche Punkte, in denen die Krümmung extremal wird, in denen also die Ableitung von κ eine Nullstelle hat, heißen Scheitelpunkte, kurz Scheitel genannt. Es wird zunächst verblüffend sein, daß jede einfach geschlossene glatte Kurve mindestens vier Scheitel besitzt, d.h., daß sie zumindest vier sozusagen kreisähnliche Kurvenbogenstellen aufweist. Wir kommen darauf noch beim Vierscheitelsatz zu sprechen.

Als abschließendes Beispiel sollen nun noch die Konstruktionen der Schmiegekreise an die Ellipse (Abb. 30a), Parabel (Abb. 30b) und Hyperbel (Abb. 30c) dargestellt werden. Die Aufgabe ist im wesentlichen mit dem Auffinden der Schmiegekreismitten

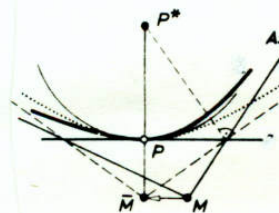
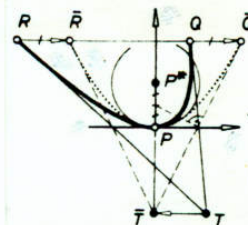
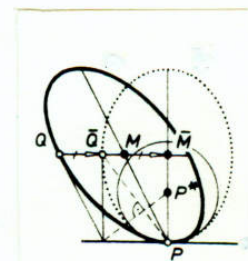
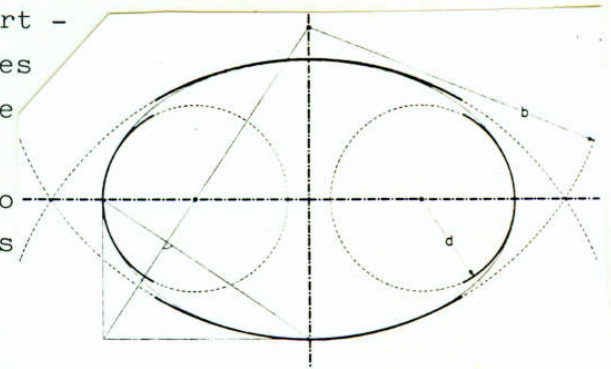


Abb. 31: Schmiegekreis bei einem affinen Kegelschnitt

gelöst. Bei der Ellipse liegen die vier Scheitel auf den Hauptachsen und zwar ergeben sie sich als Schnitt mit den jeweiligen Geraden, die durch die Ecke des Halbachsenrechtecks gehen und dabei senkrecht auf der Verbindungsstrecke der zugehörigen Scheitelpunkte stehen. Bei der Parabel liegt die Scheitelmitte auf der Achse mit doppelter Brennweitenentfernung vom Scheitel. Auch bei der Hyperbel ergeben sich die Scheitelpunkte als Schnittpunkte mit den Achsen und die Mitten der Schmiegekreise werden als Schnitt dieser Achse mit der Senkrechten ihrer Asymptoten erhalten, wobei der Asymptotenpunkt als Lotfußpunkt gerade den Scheitel ergibt. Eine Konstruktion des Krümmungskreises in einer beliebigen algebraischen Kurve *bel.* Ordnung (=allgemeine Konstruktion des Krümmungskreises) ergibt sich mittels einer Äquitangentialkurve nach dem Satz des Nikolaides:
 Der Mittelpunkt des Krümmungskreises in P ist der Schnittpunkt zusammengehöriger Normalen der Kurve und ihrer Äquitangentiale (Abb. 32). Eine Äquitangente ist dabei der Ort aller Punkte, die auf den Kurventangenten liegen und von dem jeweiligen Berührungspunkt stets gleichweit entfernt sind.

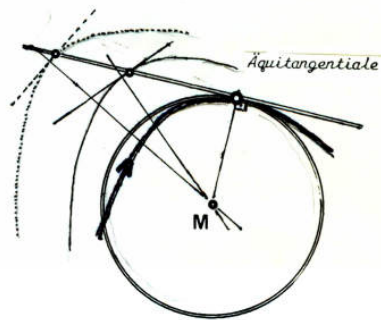


Abb. 32: Krümmungskreis-Konstruktion mittels Äquitangentiale

1. Was ist eine Kurve?	1
2. Pathologische Kurven	5
3. Was ist eine Parametertransformation?	14
4. Die Tangente	18
5. Wie kann man die Länge einer Kurve berechnen?	19
6. Die Bogenlänge als natürlicher Parameter..	24
7. Was bedeutet die zweite Ableitung?	26
8. Wie kann man die Krümmung noch charakterisieren?	28
9. Wir bewegen das Bezugssystem mit	31
10. Was ist das Tangentenbild?	32
11. Legt die Krümmung die Kurve eindeutig fest?	34
12. Wann berühren sich zwei Kurven?	37
13. Was ist ein Krümmungskreis?	41
14. Die Evolute	47
15. Die-Involute.	55
16. Unterschied zwischen lokal und global?.	58
17. Der Jordansche Kurvensatz..	60
18. Was ist Topologie?	64
19. Die Windungszahl	70
20. Projektive und nichteuklidische Geometrie.	82
21. Die Tangentendrehzahl	86
22. Was ist eine Eilinie?	92
23. Wann ist eine Menge konvex?	93
24. Eine Dimension höher	102
25. Was sind Tangentenpolarkoordinaten?	115
26. Geometrische Bedeutungen von h' und h'' ...	117
27. Der Flächeninhalt einer Eilinie..	119
28. Hyperflächen	124
29. Allgemeine Relativitäts-Theorie..	131
30. Durchmesser und Breite einer Eilinie	152
31. Was sind Gitterpunkte?..	165
32. Wie heißt der Vierscheitelsatz?	172
33. Gibt es Kreise, die fünf Ecken haben?	192
34. Wozu ist ein Gleichdick nütze?	200
35. Welche Eigenschaften haben Gleichdicke?	205
36. Was sind Zindlerkurven?..	210
37. Wer kennt Kakeyas Problem?	214
38. Raumkurven konstanter Breite..	218
39. Was versteht man unter Gesamtkrümmung?.	220
40. Verallgemeinerte Kurven konstanter Breite.	228
41. Gibt es auch Körper konstanter Breite?.	231
42. Kann man verbogene Flächen eben machen?..	234
43. Wozu stetige Vektorfelder?.	240
44. Die am besten untersuchten Flächen sind minimal.	244
45. Was versteht man unter Katastrophentheorie?..	270
46. Zum Schluss ein fünf-dimensionale Betrachtung.	281

Referenzen