

Kurventheorie

14. Die Evolute

Welche Kurve beschreiben die
Mittelpunkte der Krümmungskreise?

Betrachten wir die Krümmungskreismitten eines Kurvenbogens, dessen stetige Krümmung nirgends verschwindet, der also insbesondere keinen Wendepunkt besitzt, so bilden diese eine neue Kurve, die sog. EVOLUTE (Abb. 33). Nun gibt es allerdings auch glatte Kurven, die nicht C^2 -Kurven sind und deshalb als "Evolute" keinen zusammenhängenden Bogen bilden, sondern nur aus einzelnen isolierten Punkten bestehen (Abb. 34). Dabei macht die Evolute stets bei Krümmungsunstetigkeiten Sprünge. An den Stellen verschwindender Krümmung $\kappa = 0$ ist der Krümmungsradius unendlich $\rho = \infty$ und die Krümmungsmittelpunkte entgehen dem Zugriff. Die Länge des Evolutenbogens ist gerade gleich der Differenz der Krümmungsradien in seinen Endpunkten (Abb. 35). Dies fand Christian Huygens bereits 1673. Die ursprüngliche Definition der Evolute von Huygens erklärt diese als Hüllkurve der Kurvennormalen: Die Senkrechten der Kurventangenten durch den jeweiligen Berührungspunkt bilden eine Einhüllende, die Enveloppe aller Normalen der Kurve, genannt Evolute (Abb. 36).

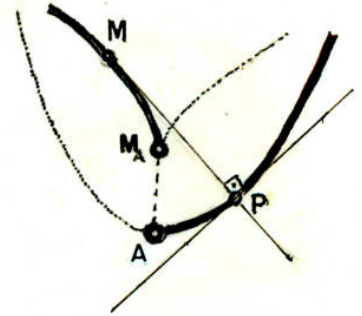


Abb. 33: Evolute eines Kurvenbogens

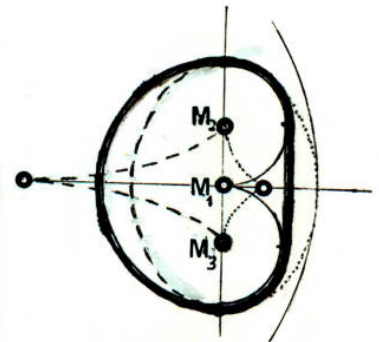


Abb. 34: Die Evolute der aus drei Kreisbögen und einer Strecke zusammengesetzte Figur besteht aus den drei Punkten M_1 , M_2 , M_3 und einem unendlich fernen Punkt.

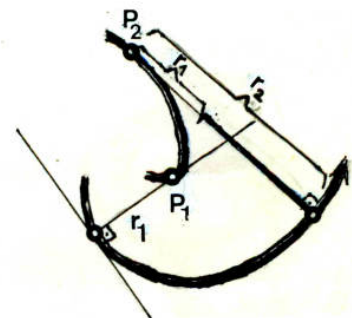
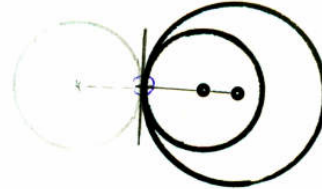


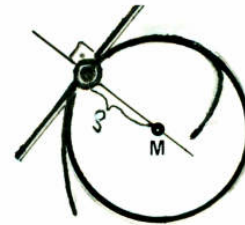
Abb. 35: Die Bogenlänge des Evolutenbogens P_1P_2 ist $r_2 - r_1$.

Was ist ein Krümmungskreis?

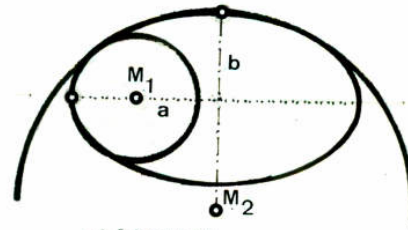
Berühren sich zwei verschieden große Kreise in einem Punkt, so ist diese Berührung von genau erster Ordnung, da beide Kurven gemeinsame Tangenten, aber verschiedene Krümmung aufweisen (Abb. 29a). Stellen wir uns nun vor, daß wir eine vorgegebene Kurve in einem bestimmten Kurvenpunkt P bestmöglich durch einen Kreisbogen anpassen wollen. Ebenso könnten wir etwa durch andere Kegelabschnitte wie Ellipsen oder Parabeln annähern, jedoch hat der Kreis den Vorteil, daß er in jedem seiner Punkte die gleiche Krümmung aufweist. Derjenige Kreis nun, der den Kurvenverlauf bei P am besten nachahmt, hat dort dieselbe Krümmung wie die Kurve. Deshalb nennt man ihn Krümmungskreis und sein Radius Krümmungsradius $\rho = 1/r$ (sprich: "rho"). Eine weitere Übereinstimmung als in der Krümmung ist i.a. nicht möglich (Abb. 29b).



a)



b) Krümmungskreis



c) Schmiegekreis

Den Krümmungskreis kann man dadurch erhalten, indem man drei Kurvenpunkte aus einer Umgebung des Berührungspunktes, die nicht alle auf einer Geraden liegen sollen, herausgreift und den durch diese eindeutig

Abb. 29: Kreisberührung von genau 1., 2. und 3. Ordnung

1. Was ist eine Kurve?	1
2. Pathologische Kurven	5
3. Was ist eine Parametertransformation?	14
4. Die Tangente	18
5. Wie kann man die Länge einer Kurve berechnen?	19
6. Die Bogenlänge als natürlicher Parameter..	24
7. Was bedeutet die zweite Ableitung?	26
8. Wie kann man die Krümmung noch charakterisieren?	28
9. Wir bewegen das Bezugssystem mit	31
10. Was ist das Tangentenbild?	32
11. Legt die Krümmung die Kurve eindeutig fest?	34
12. Wann berühren sich zwei Kurven?	37
13. Was ist ein Krümmungskreis? ..	41
14. Die Evolute	47
15. Die-Involute.	55
16. Unterschied zwischen lokal und global?.	58
17. Der Jordansche Kurvensatz..	60
18. Was ist Topologie? ..	64
19. Die Windungszahl ..	70
20. Projektive und nichteuklidische Geometrie.	82
21. Die Tangentendrehzahl ..	86
22. Was ist eine Eilinie? ..	92
23. Wann ist eine Menge konvex? ..	93
24. Eine Dimension höher ..	102
25. Was sind Tangentenpolarkoordinaten?	115
26. Geometrische Bedeutungen von h' und h'' ..	117
27. Der Flächeninhalt einer Eilinie..	119
28. Hyperflächen ..	124
29. Allgemeine Relativitäts-Theorie..	131
30. Durchmesser und Breite einer Eilinie	152
31. Was sind Gitterpunkte?..	165
32. Wie heißt der Vierscheitelsatz? ..	172
33. Gibt es Kreise, die fünf Ecken haben? ..	192
34. Wozu ist ein Gleichdick nütze?	200
35. Welche Eigenschaften haben Gleichdicke?	205
36. Was sind Zindlerkurven? ..	210
37. Wer kennt Kakeyas Problem?	214
38. Raumkurven konstanter Breite..	218
39. Was versteht man unter Gesamtkrümmung?.	220
40. Verallgemeinerte Kurven konstanter Breite.	228
41. Gibt es auch Körper konstanter Breite?.	231
42. Kann man verbogene Flächen eben machen?..	234
43. Wozu stetige Vektorfelder?.	240
44. Die am besten untersuchten Flächen sind minimal.	244
45. Was versteht man unter Katastrophentheorie?..	270
46. Zum Schluss ein fünf-dimensionale Betrachtung.	281
Referenzen	