Mit einem einzigen

Satz

lassen sich alle

Sätze der GEOMETRIE

beweisen

[Text eingeben]

DAS

kleinste

GITTER-DREIECKE

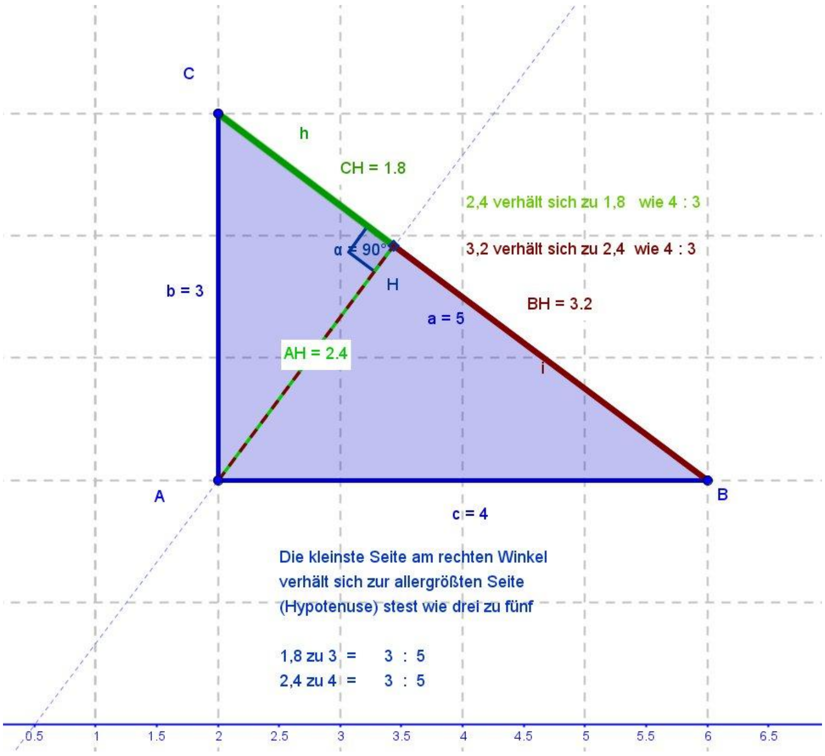
mit natürlichen

Seitenlängen

und natürlichem

Flächeninhalt

Das kleinste rationale Dreieck aus Gitterpunkten ist rechtwinklig und hat die Katheten 3 und 4 und die Hypotenuse 5. Sein Flächeninhalt ist 6. Seine nicht-triviale Höhe teilt es in zwei weitere rechtwinklige Dreiecke derselben Bauart. Alle Dreiecke haben die gleichen Winkel und sind sich somit ähnlich.



Der Streckungsfaktor k

des kleinsten rechtwinkligen Dreiecks AHC

zum Ausgangsdreieck ABC ist drei zu fünf

(Verhältnis der Hypotenusen)

3 : 5

und der des andern Teildreiecks ABH ist

4 : 5

Wie wir nun aus der Ähnlichkeitslehre bei zentrischen Streckungen wissen, **verhalten sich die Flächen ähnlicher Vielecke immer wie das Quadrat der Steckungsfaktoren k²** zueinander.

Demnach sind die Flächen der Teildreiecke

$3^2:5^2 \quad = \quad 9/25$

und

$4^2:5^2 \quad = \quad 16/25$

mal so groß wie das Ausgangsdreieck ABC:

Somit ist die Fläche A_1 vom ΔAHC

9/25 der Gesamtfläche von ΔABC

Und die Fläche A_2 vom ΔABH ist

das 16/25 fache vom der Gesamtfläche

d.h.

$A_1 + A_2 = 9/25 \text{ von } A + 16/25 \text{ von } A$

$9*6/25 \quad = 2{,}16$

$\underline{16*6/25 = 3{,}84}$

$\Sigma \quad = \quad 6$

Und somit ist

$A = 9/25\ A + 16/25\ A$ oder

$1 = 9/25+16/25$

$1 = \mathbf{(9+16)/25}$

bzw.

$9+16=25$

oder

$\mathbf{3^2+4^2 = 5^2}$

Man kann jedes rechtwinklige Dreieck durch die Höhe in zwei zu ABC ähnliche rechtwinklige Dreiecke zerlegen, und erhält somit den Satz des Pythagoras, mit dem alle anderen Sätze der euklidischen Geometrie beweisbar sind[1]:

Im Rechteck ist das Quadrat der Länge einer Diagonalen ist die Summe des Längen- und Breitenquadrats!

Dies könnte vielleicht der kürzeste Beweis des Satzes vom Pythagoras sein:

Man spiegle das rechtwinklige Dreieck an der **Hypotenuse c** und die durch die Höhe erzeugten ähnlichen Teildreiecke spiegle man an deren Katheten. Dann hat man ähnliche rechtwinklige Dreiecke, für die die ***Summe der Kathetendreiecke das Hypotenusendreieck liefert***.

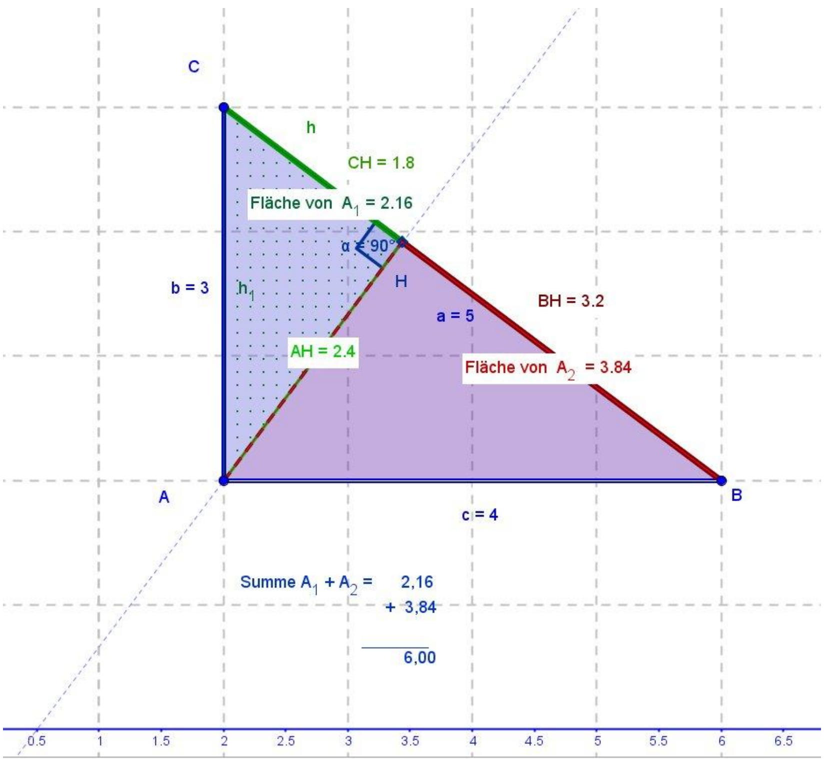
[1] Beispielsweise die unbekannte Formel von Rene Descartes für vier siich küssende Kreise: Die Summe der Krümmungen zum Quadrat ist die doppelte Summe der Krümmungsquadrate!
→ Arno Fehringer >>Mathegarten<< oder npage

Flächensumme Kathetendreiecke = Gesamtdreieck

$$A_a + A_b = A_c$$

Gilt dies für einen Fall von ähnlich aufgesetzten Gebilden, dann gilt das auch für alle anderen, also etwa für ähnlich-aufgesetzte Kaninchen oder Tauben, ähnliche Fünfecke oder eben auch für Quadrate: Voila

$$a^2+b^2 = c^2$$



Die Summe der Kathetenquadrate ist das Hypotenusenquadrat!

Insbesondere ist der Satz des Pythagoras also nur die Folge der Zerlegbarkeit in zwei zu ABC ähnliche Dreiecke.

In Geometrien in denen es keine ähnlichen Dreieck gibt, wie etwa auf einer Kugeloberfläche, gilt er auch nicht!

Ferner

Natürliche Zahlen a, b, c und n<2, die
$a^n + b^n = c^n$

erfüllen, existieren überhaupt nicht!

Die exakte Hochzahl[2] 2 kennzeichnet den euklidischen Fall. In einer Nichteuklidischen Geometrie gibt es keinen Satz des Pythagoras – statt dessen einen Cosinussatz! Die Nichteuklidischen Geometrieen kennen keine Ähnlichkeiten! Auch ist dann die Winkelsumme im Dreieck nicht mehr konstant, denn das Parallelenpostulat gilt nicht: Es gibt keine (oder unendlich viele) Parallele(n) zu einer gegebenen Geraden durch einen Punkt, der nicht auf ihr liegt!

[2] Beim Gravitationsgesetz ist die ganz exakte 2 im Nenner beim Entfernungsquadrat von entscheidender Bedeutung für die Planetenbahnen, denn ändert sich die Zwei nur ein wenig, dann sind die Keplerschen Kegelschnittbahnen nicht mehr möglich bzw. chaotisch.
Allerdings könnte es vielleicht korrigiert werden müssen
→ MOND als Alternative für die dunkle Materie.

Nichts desto weniger gibt es einen drei-dimensionalen Satz des Pythagoras (und sogar einen n-dimensionalen):

Im Eulerschen Simplex ist die **Summe der Quadrate der n rechtwinkligen Kathetenflächen** ***gleich dem*** **Quadrat** der dem `rechten Raumwinkel´ gegenüber-liegenden
Hypotenusenfläche.